

Correction Hiver 10

Analyse asymptotique & Bijection

Solution de l'exercice 1

1. **Au voisinage de 0.** On sait que $\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et que $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$. Donc par produit,

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3.$$

Autrement dit,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^3 + o(x^3).$$

Donc la courbe représentative de f admet pour tangente en 0 la droite d'équation

$$y = 0.$$

De plus $f(x) - 0 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3$. et deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré. Donc

$$\boxed{\text{La courbe de } f \text{ est en dessous de sa tangente en } 0^- \text{ et au dessus en } 0^+.$$

2. **Au voisinage de $+\infty$.** On sait que pour tout $x > 0$,

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Posons $u = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Puisque $\arctan(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u + o(u^2)$, on en déduit que

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

D'autre part,

$$\frac{x^2}{1+x} = \frac{x^2}{x} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x - 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Alors, par produit,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \left(x - 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{2}x - 1 + o\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\quad - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\quad + \frac{\pi}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\quad + o\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1 + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Conclusion, la courbe représentative admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation

$$\boxed{y = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1.}$$

De plus,

$$f(x) - \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{x} > 0$$

Or deux équivalents ont même signe au voisinage considéré. Donc

$$\boxed{\text{Au voisinage de } +\infty \text{ la courbe de } f \text{ est au-dessus de son asymptote.}}$$

Solution de l'exercice 2

1. Précisons le comportement asymptotique de f au bord de son domaine de définition. On note que f est définie sur $\mathbb{R}$ comme différence de deux fonctions qui le sont. *Etude en $+\infty$* : Tout d'abord,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right).$$

Or par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Donc par différence et produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty (+\infty - 1) = +\infty.$$

Puis

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right).$$

De même, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Donc par différence,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

Ainsi,

le graphe de f possède une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

Etude en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x) = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

Puis,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = 0 - 1 = -1.$$

Mais aussi,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Conclusion,

le graphe de f possède une asymptote d'équation $y = -x$ en $-\infty$.

2. Dressons le tableau de variation complet de f . La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions qui le sont et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$. Dès lors, par la question précédente et le fait que $f(0) = 1$, on en conclut :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	1	$+\infty$

3. Justifions qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_-$ tel que $f(\alpha) = e - 1$. On a

- la fonction f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_-$,
- par la question précédente, la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$,
- on a vu que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty > e - 1$. De plus $e > 2$ donc $e - 1 > 1 = f(0)$.

Donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,

$$\boxed{\exists! \alpha \in \mathbb{R}_-, f(\alpha) = e - 1.}$$

4. Déterminons $J = f(\mathbb{R}_+)$ et $f^{-1}([0; e - 1])$. Par la question 2 on a directement,

$$\boxed{J = f(\mathbb{R}_+) = [1; +\infty[.}$$

D'autre part, par la question précédente, et le fait que $f(1) = e - 1$, on obtient

x	$-\infty$	α	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	$+\infty$	$e - 1$	1	$e - 1$	$+\infty$

Conclusion,

$$\boxed{f^{-1}([0; e - 1]) = f^{-1}([1; e - 1]) = [\alpha; 1].}$$

5. Soit g la restriction de f de $\mathbb{R}_+$ dans J . Montrons que g définit une bijection. Par ce qui précède,

- la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$,
- la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Donc par le théorème de la bijection, g définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $g(\mathbb{R}_+) = \left[g(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[= [1; +\infty[= J$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ définit bien une bijection de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } J.}$$

6. Montrons que g^{-1} est dérivable sur un sous-ensemble J' de J et pour tout $y \in J'$ exprimons $(g^{-1})'(y)$ en fonction de $g^{-1}(y)$. Posons $J' =]1; +\infty[$. Alors J' est bien inclus dans J de plus,

- la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
- la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = e^x - 1 > 0$, car $x > 0$. Donc $g'(x) \neq 0$ (il était donc nécessaire d'enlever 0 de $\mathbb{R}_+$ et donc 1 de J).

Par le théorème de la dérivée de la réciproque, on en déduit que

$$\boxed{g^{-1} \text{ est dérivable sur } g(\mathbb{R}_+^*) = J' =]1; +\infty[.}$$

De plus,

$$\boxed{\forall y \in J', (g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{g^{-1}(y)} - 1}.}$$