

Correction Hiver 11

Suites & Trigonométrie

Solution de l'exercice 1 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_n - n\pi$.

1. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\pi - \frac{\pi}{2} < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$ donc

$$-\frac{\pi}{2} < x_n - n\pi = y_n < \frac{\pi}{2}.$$

Donc la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par $-\frac{\pi}{2}$ et majorée par $\frac{\pi}{2}$. Conclusion,

La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} f(y_n) &= f(x_n - n\pi) \\ &= \tan(x_n - n\pi) - (x_n - n\pi) \\ &= \tan(x_n) - x_n + n\pi && \text{car } \tan \pi\text{-périodique} \\ &= f(x_n) + n\pi \\ &= 0 + n\pi. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(y_n) = n\pi.$$

3. On en déduit de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(y_n) = n\pi < (n+1)\pi = f(y_{n+1}).$$

Or la fonction f est strictement croissante sur I_0 (par la question 1). Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n < y_{n+1}.$$

4. Par les questions précédentes, on a $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante et majorée par $\frac{\pi}{2}$. Donc par le théorème de convergence monotone, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{\pi}{2} < y_n < \frac{\pi}{2}$. Donc par passage à la limite, $-\frac{\pi}{2} \leq \ell \leq \frac{\pi}{2}$. Or par la question 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n\pi = +\infty$. Supposons $\ell = -\frac{\pi}{2}$ alors par caractérisation séquentielle de la continuité,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = -\infty.$$

Contradiction. De même si $\ell \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on aurait par continuité de f ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = f(\ell) \neq +\infty.$$

Contradiction. Donc $\ell = \frac{\pi}{2}$. Conclusion,

La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\pi}{2}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n = n\pi + y_n$. Or par la question précédente, $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{2} + o(1)$. Conclusion,

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

Solution de l'exercice 2

- La fonction f n'est ni paire ni impaire. En effet $f(0) = 3 + 1 = 4 \neq 0$ donc la fonction f n'est pas impaire (est-ce bien clair pour vous qu'une fonction impaire passe nécessairement par $(0; 0)$? Sauriez-vous le démontrer?). Sinon nous pouvions aussi remarquer que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 + 1 = -1$ et $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 + 1 = 3$. Donc on remarque que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq -f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et donc f n'est pas impaire et de même $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et donc f n'est pas paire.

La fonction f est 2π -périodique. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x + 2\pi) = 3 \cos(x + 2\pi) - 2 \sin(x + 2\pi) + 1 = 3 \cos(x) - 2 \sin(x) + 1 = f(x),$$

car $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques. Donc f est 2π -périodique.

- Méthode 1.** Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $\cos(x) \leq 1$ et $\sin(x) \geq -1$ donc $3 \cos(x) \leq 3$ et $-2 \sin(x) \leq 2$. Ainsi

$$f(x) \leq 3 + 2 + 1 = 6.$$

De même on a $\cos(x) \geq -1$ et $\sin(x) \leq 1$ donc,

$$f(x) \geq -3 - 2 + 1 = -4.$$

Ainsi la fonction f est majorée par 6 et minorée par -4 et est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Méthode 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, par l'inégalité triangulaire,

$$|f(x)| \leq |3 \cos(x)| + |-2 \sin(x)| + |1| = 3 |\cos(x)| + 2 |\sin(x)| + 1.$$

Or $|\cos(x)| \leq 1$ et $|\sin(x)| \leq 1$. Par conséquent,

$$|f(x)| \leq 3 + 2 + 1 = 6.$$

Donc par la proposition III.9 du chapitre 6, la fonction f est bornée.

- Posons $x = \frac{3}{\sqrt{13}}$ et $y = \frac{2}{\sqrt{13}}$. On a

$$x^2 + y^2 = \frac{9}{13} + \frac{4}{13} = 1.$$

Donc par la paramétrage du cercle trigonométrique (proposition V.4 du chapitre 2), on en déduit

$$\text{il existe } a \in [0; 2\pi[\text{ tel que } \cos(a) = \frac{3}{\sqrt{13}} \text{ et } \sin(a) = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

- Un petit coup de forme polaire de $3 \cos(x) - 2 \sin(x)$ que vous n'avez, bien entendu pas oublié : soit $x \in \mathbb{R}$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \cos(x) - 2 \sin(x) + 1 = \sqrt{13} \left(\frac{3}{\sqrt{13}} \cos(x) - \frac{2}{\sqrt{13}} \sin(x) \right) + 1 \\ &= \sqrt{13} (\cos(a) \cos(x) - \sin(a) \sin(x)) + 1 \\ &= \sqrt{13} \cos(x + a) + 1 \end{aligned}$$

Alors d'une part, on en déduit que $\sqrt{13} + 1$ est un majorant de f : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + a) \leq 1$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq \sqrt{13} + 1,$$

qui est vous le noterez plus précis que le majorant obtenu à la question II.2.

De plus ce majorant est atteint : si $x = -a \in \mathbb{R}$ alors $f(-a) = \sqrt{13} \cos(0) + 1 = \sqrt{13} + 1$. Donc $\sqrt{13} + 1$ est LE maximum de f et est atteint en $x = -a$ (et même pour les $x \equiv -a [2\pi]$).

D'autre part, $1 - \sqrt{13}$ est un minorant de f : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \geq -1$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq -\sqrt{13} + 1,$$

à nouveau ce minorant étant plus grand que $-4 + 1 = -3$ est plus précis que celui trouvé à la question II.2.

De plus ce minorant est atteint : si $x = \pi - a$, alors $f(x) = f(\pi - a) = \sqrt{13} \cos(\pi - a + a) + 1 = -\sqrt{13} + 1$.
Donc $1 - \sqrt{13}$ est LE minimum de f et est atteint tous les $(2k + 1)\pi - a$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion $1 + \sqrt{13}$ est le maximum de f et $1 - \sqrt{13}$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.