

Exercice Hiver 12

Continuité-Dérivabilité & Matrices

Exercice 1 Soit $f : x \mapsto \arccos(1 - x^2)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Justifier que f est dérivable sur $U =]-\sqrt{2}; 0[\cup]0; \sqrt{2}[$ et calculer sa dérivée.
3. Montrer que pour tout $x \in]0; \sqrt{2}[$, il existe $c_x \in]x; \sqrt{2}[$ tel que

$$\frac{f(x) - \pi}{x - \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2 - c_x^2}}.$$

4. En déduire $\lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt{2} \\ x < \sqrt{2}}} \frac{f(x) - \pi}{x - \sqrt{2}}$.

Exercice 2 On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. En déduire les puissances de A .
4. La matrice D est-elle inversible ? En déduire si A est inversible ou non.