

Correction Hiver 12

Continuité-Dérivabilité & Matrices

Solution de l'exercice 1

1. Déterminons le domaine de définition de f . Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} &\Leftrightarrow -1 \leq 1 - x^2 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -2 \leq -x^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \geq x^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Conclusion, le domaine de définition de f est

$$\mathcal{D} = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}].$$

2. Justifions que f est dérivable sur $U =]-\sqrt{2}; 0[\cup]0; \sqrt{2}[$ et calculons sa dérivée. Soit $x \in U$. Alors,

$$0 < x^2 < 2.$$

Donc $0 > -x^2 > -2$ puis, $1 > 1 - x^2 > -1$. Or la fonction arccos est dérivable sur $] -1; 1[$ et $x \mapsto 1 - x^2$ est dérivable sur U . Conclusion, par composée,

$$f \text{ est dérivable sur } U.$$

De plus, pour tout $x \in U$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 - x^2)' \times \frac{-1}{\sqrt{1 - (1 - x^2)^2}} \\ &= -2x \frac{-1}{\sqrt{2x^2 - x^4}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2} \sqrt{2 - x^2}} \\ &= \frac{x}{|x|} \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x \in U, f'(x) = \frac{x}{|x|} \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}}.$$

3. Montrons que pour tout $x \in]0; \sqrt{2}[$, il existe $c_x \in]x; \sqrt{2}[$ tel que $\frac{f(x)}{x} = \frac{2}{\sqrt{2 - c_x^2}}$. Soit $x \in]0; \sqrt{2}[$.

Puisque f est définie et même sur $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ comme composée de fonctions qui le sont et dérivable sur U , on en déduit que

- f est continue sur $[0; x] \subseteq [0; \sqrt{2}] \subseteq [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$,
- f est dérivable sur $]0; x[\subseteq]0; \sqrt{2}[\subseteq U$.

Donc par le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]x; \sqrt{2}[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(\sqrt{2})}{x - \sqrt{2}} = f'(c_x).$$

Autrement dit, par la question précédente,

$$\frac{f(x) - \arccos(1-2)}{x - \sqrt{2}} = \frac{c_x}{|c_x|} \frac{1}{\sqrt{2 - (c_x)^2}}.$$

Or $c_x > x > 0$ donc $|c_x| = c_x$. Conclusion,

$$\boxed{\frac{f(x) - \pi}{x - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2 - (c_x)^2}}}.$$

4. Dédisons-en $\lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt{2} \\ x < \sqrt{2}}} \frac{f(x) - \pi}{x - \sqrt{2}}$. Avec les notation de la question précédente, puisque $\sqrt{2} > c_x > x > 0$,

on a $2 > c_x^2 > x^2 > 0$ donc $0 < 2 - (c_x)^2 < 2 - x^2$. Donc

$$\frac{1}{\sqrt{2 - (c_x)^2}} > \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}}.$$

Or

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt{2} \\ x < \sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} = +\infty.$$

Donc par le théorème de minoration, on en déduit que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt{2} \\ x < \sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2 - (c_x)^2}} = +\infty.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt{2} \\ x < \sqrt{2}}} \frac{f(x) - \pi}{x - \sqrt{2}} = +\infty}.$$

Solution de l'exercice 2

1. On applique le pivot de Gauss. On a les opérations élémentaires sur les lignes suivantes :

$$\begin{array}{lll} P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & & I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 & \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftrightarrow L_3 & \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 & \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3 & \sim_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Puisque $P \underset{\mathcal{L}}{\sim} I_3$, on en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible}}$. De plus,

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}}.$$

Avez-vous bien vérifié votre résultat ? On a

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = I_3 \text{ OK!}$$

2. On a les égalités entre matrices suivantes :

$$\begin{aligned} D = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}.$$

3. Par récurrence, on peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (formule fausse en $n = 0$!)

$$D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

Or $A = PDP^{-1}$ puis par récurrence également,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 \times 4^n & 4^n & -2 \times 4^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 4^n & 4^n & 1 - 2 \times 4^n \\ -2 \times 4^n & -4^n & 2 \times 4^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = \begin{pmatrix} 2 \times 4^n & 4^n & 1 - 2 \times 4^n \\ -2 \times 4^n & -4^n & 2 \times 4^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^0 = I_3.$$

On vérifie son résultat pour $n = 1$.

4. D est une matrice diagonale (important !) ayant un 0 sur sa diagonale. Conclusion,

D n'est pas inversible.

On sait que $D = P^{-1}AP$. Supposons A inversible. Alors comme P et P^{-1} sont inversibles, par produit de trois matrices inversibles, D serait inversible (le produit de matrices inversibles est inversible et de plus $(AB)^{-1} = \dots$). Contradiction. Conclusion,

A n'est pas inversible.