Exercice Printemps 01
Applications linéaires / Suites

Exercice 1 On pose $E = \mathbb{R}_3[X]$ et on définit

$$\begin{aligned} \varphi \ : \mathbb{R}_3[X] &\to \mathbb{R}_3[X] \\ P &\mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P. \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\mathrm{Im}\,(\varphi)$, $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ et préciser leur dimension.
3. En déduire que $\varphi^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
4. Montrer que pour tout $Q \in \mathrm{Im}\,(\varphi)$ il existe un unique $P \in E$ tel que $\begin{cases} \varphi\,(P) = Q \\ P(0) = P'(0) = 0 \end{cases}$.

Exercice 2 On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $0 < u_0 < v_0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existent et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Etudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. On note u la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et v la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
5. En déduire les valeurs de u et v.