# Correction Printemps 01
# Applications linéaires / Suites

**Solution de l'exercice 1**

1. On a les deux points suivants :
   - Si $P \in E$, alors $\varphi(P)$ existe bien dans $\mathbb{R}[X]$ et
   $$\begin{aligned}\deg(\varphi(P)) &= \deg(P(X+1)+P(X-1)-2P)\\ &\leqslant \max(\deg(P(X+1)), \deg(P(X-1)), \deg(2P))\\ &= \max(\deg(P)\times\deg(X+1), \deg(P)\times\deg(X-1), \deg(2)+\deg(P))\\ &= \max(\deg(P)\times 1, \deg(P)\times 1, 0+\deg(P))\\ &= \deg(P)\end{aligned}$$
   Donc
   $$\deg(\varphi(P)) \leqslant \deg(P) \leqslant 3.$$
   Donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\varphi$ est une application de $E$ dans $E$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(P, Q) \in E^2$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Alors
   $$\begin{aligned}\varphi(\lambda P+\mu Q) = \varphi(R) &= R(X+1)+R(X-1)-2R\\ &= (\lambda P+\mu Q)\circ(X+1) - (\lambda P+\mu Q)\circ(X-1) - 2(\lambda P+\mu Q)\\ &= \lambda(P(X+1)+P(X-1)-2P) + \mu(Q(X+1)+Q(X-1)-2Q)\\ &= \lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q).\end{aligned}$$
   Donc $\varphi$ est linéaire.

   Conclusion,
   $$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(E) \text{ i.e. est un endomorphisme de } E.}$$
2. On sait que $(1, X, X^2, X^3)$ est la base canonique de $E = \mathbb{R}_3[X]$ et donc est une famille génératrice de $E$. Ainsi,
   $$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\varphi(1), \varphi(X), \varphi\left(X^2\right), \varphi\left(X^3\right)\right).$$
   Calculons,
   $$\begin{aligned}\varphi(1) &= 1+1-2 = 0_E\\ \varphi(X) &= X+1+X-1-2X = 0_E\\ \varphi\left(X^2\right) &= (X+1)^2+(X-1)^2-2X^2 = X^2+2X+1+X^2-2X+1-2X^2 = 2\\ \varphi\left(X^3\right) &= (X+1)^3+(X-1)^3-2X^3 = X^3+3X^2+3X+1+X^3-3X^2+3X-1-2X^3 = 6X.\end{aligned}$$
   Ainsi, on observe que $1 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $X \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et
   $$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(0_E, 0_E, 2, 6X) = \mathrm{Vect}(2, 6X) = \mathrm{Vect}(1, X) \qquad \begin{array}{l} C_1 \leftarrow \frac{1}{2}C_1 \\ C_2 \leftarrow \frac{1}{6}C_2 \end{array}$$
   On reconnait la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$ et on en déduit donc que
   $$\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_1[X]} \quad \text{et} \quad \boxed{\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2.}$$

Par le théorème du rang, on en déduit également que

$$\boxed{\dim\left(\operatorname{Ker}\left(\varphi\right)\right) = \dim\left(E\right) - \dim\left(\operatorname{Im}\left(f\right)\right) = 4 - 2 = 2.}$$

Or nous avons vu que $1 \in \operatorname{Ker}\left(\varphi\right)$ et $X \in \operatorname{Ker}\left(\varphi\right)$ donc, puisque $\operatorname{Ker}\left(\varphi\right)$ est un espace vectoriel,

$$\mathbb{R}_1[X] = \operatorname{Vect}\left(1, X\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(\varphi\right).$$

Puis par égalité des dimensions, $\dim\left(\mathbb{R}_1[X]\right) = 2 = \dim\left(\operatorname{Ker}\left(\varphi\right)\right)$, on en conclut que

$$\boxed{\dim\left(\operatorname{Ker}\left(\varphi\right)\right) = \mathbb{R}_1[X].}$$

3. Soit $P \in E$. On a bien entendu $\varphi\left(P\right) \in \operatorname{Im}\left(\varphi\right)$. Or par la question précédente,

$$\operatorname{Im}\left(\varphi\right) = \mathbb{R}_1[X] = \operatorname{Ker}\left(\varphi\right).$$

Donc $\varphi\left(P\right) \in \operatorname{Ker}\left(\varphi\right)$. Ainsi

$$\varphi^2\left(P\right) = \varphi\left(\varphi\left(P\right)\right) = 0_E.$$

Ceci étant vrai pour tout $P \in E$, on en conclut que

$$\boxed{\varphi^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

4. Soit $Q \in \operatorname{Im}\left(\varphi\right)$. Par la question 2, on a $\operatorname{Im}\left(\varphi\right) = \mathbb{R}_1[X]$. Donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Q = aX + b$. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \varphi\left(P\right) = Q \\ P(0) = P'(0) = 0 \end{cases} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi\left(P\right) = Q \\ a_0 = a_1 = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi\left(a_2X^2 + a_3X^3\right) = Q \\ a_0 = a_1 = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_2\,\varphi\left(X^2\right) + a_3\,\varphi\left(X^3\right) = Q \\ a_0 = a_1 = 0 \end{cases} && \text{car } \varphi \text{ est linéaire.} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a_2 + 6a_3X = aX + b \\ a_0 = a_1 = 0 \end{cases} && \text{en utilisant les calculs de la question 2.} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_2 = \frac{b}{2} \\ a_3 = \frac{a}{6} \\ a_0 = a_1 = 0 \end{cases} && \text{par unicité des coefficients d'un polynôme.} \\
& \Leftrightarrow \quad P = \frac{b}{2}X^2 + \frac{a}{6}X^3.
\end{aligned}$$

On a donc bien trouvé une et une seule solution et donc

$$\boxed{\forall Q \in \operatorname{Im}\left(\varphi\right),\ \exists! P \in E, \qquad \begin{cases} \varphi\left(P\right) = Q \\ P(0) = P'(0) = 0. \end{cases}}$$

**Solution de l'exercice 2**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$ : « $u_n$ et $v_n$ existent et sont strictement positifs » . Procédons par récurrence.
*Initialisation.* Si $n = 0$, alors $u_0$ et $v_0$ existent et sont strictement positifs. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
*Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors, $u_n$ et $v_n$ existent et sont strictement positifs. Donc $u_n + v_n > 0$ et ainsi, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n+v_n}$ existe et de même

$v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n+v_n}$ existe. De plus comme $u_n^2 > 0$, $u_n + v_n > 0$ et $v_n^2 > 0$, on en déduit également que $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
*Conclusion*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\text{Les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ existent et que pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 0 \text{ et } v_n > 0.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n > 0$ et donc $u_n + v_n > u_n$. Donc $\frac{1}{u_n+v_n} < \frac{1}{u_n}$. Puisque $u_n^2 > 0$, on en déduit que $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n+v_n} < \frac{u_n^2}{u_n} = u_n$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Par symétrie des hypothèses, on démontre de même que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Conclusion,

$$\boxed{\text{Les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont strictement décroissantes.}}$$

3. On a vu que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Donc par le théorème de convergence monotone, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De même pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent.}}$$

On note $u$ la limite de $u$ et $v$ la limite de $v$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n+v_n} - \frac{v_n^2}{u_n+v_n} = \frac{v_n^2 - u_n^2}{u_n+v_n} = \frac{(v_n-u_n)(v_n+u_n)}{u_n+v_n} = v_n - u_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{La suite } (v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante.}}$$

5. Par la question précédente, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n - u_n = v_0 - u_0.$$

Donc par passage à la limite,

$$v - u = v_0 - u_0.$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ donc $u \geqslant 0$ et donc $v = v_0 - u_0 + u \geqslant v_0 - u_0 > 0$. Dès lors, $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u + v \geqslant v > 0$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n+v_n}$. Donc par passage à la limite,

$$\begin{aligned}
u = \frac{u^2}{u+v} \quad &\Leftrightarrow \quad u^2 + uv = u^2 \qquad \text{car } u+v > 0\\
&\Leftrightarrow \quad uv = 0\\
&\Leftrightarrow \quad u = 0 \qquad \text{car } v > 0.
\end{aligned}$$

Par suite, puisque $v = v_0 - u_0 + u$, on en déduit que $v = v_0 - u_0$. Conclusion,

$$\boxed{u = 0 \qquad \text{et} \qquad v = v_0 - u_0.}$$