

Exercice Printemps 02

Polynômes / continuité-dérivabilité

Exercice 1 Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $P = (X + 1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$.

1. Préciser d le degré de P .
2. On note r_1, \dots, r_d les racines de P (non nécessairement distinctes). Préciser $\sum_{k=1}^d r_k$.
3. Déterminer la multiplicité de -1 pour P .
4. Montrer que $2X^3 + 3X^2 + X$ divise P .

Exercice 2 Soit $f : x \mapsto x\sqrt{x}$.

1. Préciser le domaine de définition de f .
2. Calculer la dérivée de f sur \mathbb{R}_+ .
3. Montrer que f est \mathcal{C}^1 en 0 et préciser $f'(0)$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{3}{2}\sqrt{n} \leq (n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n} \leq \frac{3}{2}\sqrt{n+1}.$$

5. En déduire un équivalent simple de $u_n = (n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n}$.
6. Retrouver le résultat de la question précédente directement.