

## Correction Printemps 02

### Polynômes / continuité-dérivabilité

#### Solution de l'exercice 1

1. Par le binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k - X^{2n} - 2X - 1 = \sum_{k=1}^{2n-1} \binom{2n}{k} X^k - 2X && \text{car } 2n-1 \geq 1 \text{ car } n \geq 2 \\
 &= \frac{(2n)!}{(2n-1)!1!} X^{2n-1} + \sum_{k=1}^{2n-2} \binom{2n}{k} X^k - 2X \\
 &= 2nX^{2n-1} + \sum_{k=1}^{2n-2} \binom{2n}{k} X^k - 2X
 \end{aligned}$$

Or  $2n-1 > 1$  car  $n \geq 2$ . Conclusion,

$$d = \deg(P) = 2n - 1.$$

2. Poursuivons les calculs précédents,

$$\begin{aligned}
 P &= 2nX^{2n-1} + \frac{(2n)!}{(2n-2)!2!} X^{2n-2} + \sum_{k=1}^{2n-3} \binom{2n}{k} X^k - 2X && \text{car } 2n-2 \geq 1 \text{ car } n \geq 2 \\
 &= 2nX^{2n-1} + \frac{(2n)(2n-1)}{2} X^{2n-2} + \sum_{k=1}^{2n-3} \binom{2n}{k} X^k - 2X \\
 &= 2nX^{2n-1} + n(2n-1)X^{2n-2} + \sum_{k=1}^{2n-3} \binom{2n}{k} X^k - 2X.
 \end{aligned}$$

Puisque  $2n-2 > 1$  (car  $n \geq 2$ ) alors en notant  $a_0, \dots, a_d$  les coefficients de  $P$ , on a  $a_{d-1} = n(2n-1)$  et  $a_d = 2n$  (rappelons que  $d = 2n-1$ ). Alors, par la relation racine-coefficient, on a

$$\sum_{k=1}^d r_k = -\frac{a_{d-1}}{a_d} = -\frac{n(2n-1)}{2n} = -\frac{2n-1}{2}.$$

3. On observe que

$$P(-1) = (0)^{2n} - (-1)^{2n} - 2(-1) - 1 = -1 + 2 - 1 = 0.$$

Donc  $-1$  est une racine de  $P$ . De plus,

$$P' = 2n(X+1)^{2n-1} - 2nX^{2n-1} - 2 \quad \text{car } 2n-1 \geq 0 \text{ car } n \geq 2.$$

Dès lors,

$$P'(-1) = 0 + 2n - 2 > 0 \quad \text{car } n \geq 2.$$

Conclusion,

$$-1 \text{ est une racine simple de } P.$$

4. On note que  $2X^3 + 3X^2 + X = X(2X^2 + 3X + 1)$ . Puis on remarque que  $-1$  est une racine de  $2X^2 + 3X + 1$  donc  $X+1$  divise  $2X^2 + 3X + 1$  et même  $2X^2 + 3X + 1 = (X+1)(2X+1)$ . Ainsi,

$$2X^3 + 3X^2 + X = X(X+1)(2X+1).$$

Par suite,  $2X^3 + 3X^2 + X$  admet trois racines simples distinctes :  $0, -1, -\frac{1}{2}$ . On a déjà vu que  $-1$  est une racine de  $P$ . Observons également que

$$P(0) = 1^{2n} - 0 - 0 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad P\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} + 2\frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} + 0 = 0.$$

Donc  $0, -1, -\frac{1}{2}$  sont aussi racines de  $P$ . Toutes les racines de  $2X^3 + 3X^2 + X$  sont racines de  $P$  (avec une multiplicité supérieure ou égale). Conclusion,

$$\boxed{2X^3 + 3X^2 + X \text{ divise } P.}$$

## Solution de l'exercice 2

1. Précisons le domaine de définition de  $f$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a

$$f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad x\sqrt{x} \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0.$$

Donc le domaine de définition de  $f$  est donné par

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+}.$$

De plus, on note que pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) = x^{3/2}$ .

2. Calculons la dérivée de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme produit de deux fonctions qui le sont (*attention, la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0*). De plus, pour tout  $x > 0$ ,

$$f'(x) = (x^{3/2})' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

3. Montrons que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  en 0 et préciser  $f'(0)$ .

*Méthode 1, par le théorème de prolongement  $\mathcal{C}^1$ .*

- La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  comme produit de deux fonctions qui le sont.
- La fonction  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme produit de deux fonctions qui le sont.
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$  d'après la question précédente et de plus,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{3}{2}\sqrt{x} = 0.$$

donc cette limite existe bien dans  $\mathbb{R}$ .

Conclusion, par le théorème de prolongement  $\mathcal{C}^1$ ,

$$\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ en } 0 \text{ et donc sur } \mathbb{R}_+}$$

et

$$\boxed{f'(0) = 0.}$$

*Méthode 2, par les définitions.* Montrons tout d'abord que  $f$  est dérivable en 0. Pour tout  $x > 0$ , on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x\sqrt{x} - 0}{x} = \sqrt{x}.$$

Donc ce taux d'accroissement admet une limite finie et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = 0.$$

Donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ . De plus, pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$  donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Or la fonction  $\sqrt{\cdot}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ . Donc  $f'$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ . Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } f'(0) = 0.}$$

4. Montrons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{3}{2}\sqrt{n} \leq (n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n} \leq \frac{3}{2}\sqrt{n+1}.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par la question précédente,  $f$  est continue sur  $[n; n+1]$  et dérivable sur  $]n; n+1[$  (car  $n+1 > n$ ). Donc par l'identité des accroissements finis,

$$\exists c_n \in ]n; n+1[, \quad f'(c_n) = \frac{f(n+1) - f(n)}{n+1 - n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}\sqrt{c_n} = (n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n}.$$

Or  $n < c_n < n+1$  et la fonction racine carrée est croissante sur  $\mathbb{R}_+$  donc

$$\sqrt{n} \leq \sqrt{c_n} \leq \sqrt{n+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}\sqrt{n} \leq \frac{3}{2}\sqrt{c_n} \leq \frac{3}{2}\sqrt{n+1} \quad \text{car } 3/2 > 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\frac{3}{2}\sqrt{n} \leq (n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n} \leq \frac{3}{2}\sqrt{n+1}.}$$

5. Déduisons-en un équivalent simple de  $u_n = (n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n}$ . On sait que  $n+1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ . Donc par élévation à la puissance 1/2,

$$\frac{3}{2}\sqrt{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{2}\sqrt{n}.$$

Donc par la question précédente et le théorème d'encadrement des équivalents,

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{2}\sqrt{n}.$$

6. Retrouvons le résultat de la question précédente directement. Pour tout  $n > 0$ , on a

$$\begin{aligned} u_n &= (n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n} \\ &= (n+1)\sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} - n\sqrt{n} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} (n+1)\sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - n\sqrt{n} \quad \text{car } \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n}}{2} + o(\sqrt{n}) + \sqrt{n} + o(\sqrt{n}) - n\sqrt{n} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{3\sqrt{n}}{2} + o(\sqrt{n}). \end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien que

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3\sqrt{n}}{2}.$$