Exercice Printemps 03
Probabilités & Ensembles et applications

Exercice 1 Une urne contient initialement 4 boules vertes et 2 boules rouges. On effectue des tirages successifs avec remise dans l'urne avec le protocole suivant : à chaque tirage on rajoute dans l'urne une boule de la même couleur que celle que l'on vient de piocher. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire retournant 1 si l'on a pioché une boule verte au tirage n et 0 sinon et on pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$.

1. Préciser la loi de X_1.
2. A l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer la loi de X_2.
3. Montrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.
4. Pourquoi $X_1 + \cdots + X_n$ n'est pas une loi binomiale a priori ?
5. A l'aide de la formule des probabilités composées, calculer $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n = n)$.
6. A l'aide de la formule de Bayes, calculer la probabilité d'avoir pioché une boule rouge au premier tirage sachant que l'on a pioché une boule verte au deuxième.

Exercice 2 Soient E un ensemble, $(A, B) \in \mathscr{P}(E)$ et

$$f : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B)\,. \end{array}$$

Montrer que si f est injective alors $A \cup B = E$.