

Correction Printemps 03

Probabilités & Ensembles et applications

Solution de l'exercice 1

1. Précisons la loi de X_1 . On note que X_1 n'a que 0 et 1 comme issues. Ainsi X_1 suit nécessairement une loi de Bernoulli. Déterminons son paramètre. On a

$$p_1 = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

car ici le succès est d'obtenir une boule verte et au premier tirage il y a 4 boules vertes parmi 6 boules et c'est un tirages équiprobables parmi toutes les boules. Conclusion,

$$X_1 \sim \mathcal{B}\left(\frac{2}{3}\right).$$

2. A l'aide de la formule des probabilités totales, déterminons la loi de X_2 . De même $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$ donc X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_2 = \mathbb{P}(X_2 = 1)$. Calculons ce paramètre. On observe que $(X_1 = 0, X_1 = 1)$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,

$$p_2 = \mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 0) \mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1) \mathbb{P}(X_1 = 1).$$

Or si $(X_1 = 0)$ est réalisé, cela signifie que l'on a pioché au premier tirage une boule rouge. L'urne contient alors 4 boules vertes et 3 boules rouges et donc $\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 0) = \frac{4}{7}$. De même, sachant $(X_1 = 1)$ l'urne contient 5 boules vertes et 2 boules rouges et donc $\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1) = \frac{5}{7}$. Ainsi,

$$p_2 = \frac{4}{7} \times \frac{2}{6} + \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{21} + \frac{10}{21} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}.$$

Conclusion,

$$X_2 \sim \mathcal{B}\left(\frac{2}{3}\right).$$

3. Montrons que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes i.e. qu'il existe (i, j) tel que $\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) \neq \mathbb{P}(X_1 = i) \mathbb{P}(X_2 = j)$. Par exemple montrons que $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) \neq \mathbb{P}(X_1 = 1) \mathbb{P}(X_2 = 1)$. Par les questions précédentes, on a

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) \mathbb{P}(X_2 = 1) = p_1 \times p_2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

D'autre part, par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1) \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{5}{7} \frac{2}{3} = \frac{10}{21}.$$

Puisque $\frac{4}{9} \neq \frac{10}{21}$, on obtient $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) \neq \mathbb{P}(X_1 = 1) \mathbb{P}(X_2 = 1)$. Conclusion,

$$X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendants.}$$

4. Justifions pourquoi $X_1 + \dots + X_n$ n'est pas une loi binomiale a priori. Pour que $X_1 + \dots + X_n$ il suffit que les X_i suivent des lois de Bernoulli de même paramètre et soient indépendantes. Or par la question précédente, X_1, \dots, X_n ne sont pas indépendantes. Conclusion,

$$X_1 + \dots + X_n \text{ n'est pas une loi binomiale a priori.}$$

5. A l'aide de la formule des probabilités composées, montrons que $\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n = n) = \frac{20}{(n+4)(n+5)}$.
On observe que pour obtenir exactement n vertes en n tirages, il ne faut piocher à chaque tirage que des boules vertes :

$$(X_1 + \dots + X_n = n) = (X_1 = 1, \dots, X_n = 1).$$

Donc par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n = n) = \mathbb{P}(X_1 = 1) \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) \dots \mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_1 = 1, \dots, X_{n-1} = 1).$$

Or pour tout $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$, si l'on a obtenu que des boules vertes pendant $k - 1$ tirages, alors au tirage k , on a $4 + k - 1$ boules vertes parmi $6 + k - 1$ boules donc

$$\mathbb{P}(X_k = 1 \mid X_1 = 1, \dots, X_{k-1} = 1) = \frac{3 + k}{5 + k}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n = n) &= \frac{2}{3} \prod_{k=2}^n \frac{3 + k}{5 + k} \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{3 + k}{5 + k} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^n (3 + k)}{\prod_{k=1}^n (5 + k)} \\ &= \frac{4 \times \dots \times (n + 3)}{6 \times \dots \times (n + 5)} = \frac{4 \times 5}{(n + 4)(n + 5)} \\ &= \frac{20}{(n + 4)(n + 5)}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n = n) = \frac{20}{(n + 4)(n + 5)}}.$$

6. A l'aide de la formule de Bayes, calculons la probabilité d'avoir pioché une boule rouge au premier tirage sachant que l'on a pioché une boule verte au deuxième. Autrement dit, l'on cherche $\mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_2 = 1)$. Puisque $\mathbb{P}(X_2 = 1) = p_2 \neq 0$, par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_2 = 1) = \frac{\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) \mathbb{P}(X_1 = 0)}{\mathbb{P}(X_2 = 1)}.$$

Sachant que l'on a pioché une boule rouge, l'urne contient alors 4 boules vertes et 3 boules rouges donc $\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) = \frac{4}{7}$ et par ce qui précède,

$$\mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_2 = 1) = \frac{\frac{4}{7} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{7}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_2 = 1) = \frac{2}{7}}.$$

Solution de l'exercice 2 Supposons f injective. Alors, pour tout $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$, on a

$$f(X) = f(Y) \Rightarrow X = Y.$$

On veut montrer que $X = A \cup B$ est égal à $Y = E$. Calculons donc leurs images. On a d'une part,

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B) = ((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B).$$

Or $A \subseteq A \cup B$. Donc $(A \cup B) \cap A = A$. De même, $(A \cup B) \cap B = B$. Donc

$$f(X) = (A, B).$$

D'autre part, puisque $A \subseteq E$ et $B \subseteq E$,

$$f(Y) = (E \cap A, E \cap B) = (A, B).$$

Par conséquent,

$$f(X) = (A, B) = f(Y).$$

Or f est injective donc, $A \cup B = X = Y = E$. Conclusion,

| | | |
|---------------|---------------|-----------------|
| f injective | \Rightarrow | $A \cup B = E.$ |
|---------------|---------------|-----------------|