

Correction Printemps 04

Séries et analyse asymptotique

Solution de l'exercice 1 On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n^4})} - 1$. Donc

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{n(\frac{1}{n^4} + o(\frac{1}{n^4}))} - 1 && \text{car } u = \frac{1}{n^4} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{\frac{1}{n^3} + o(\frac{1}{n^3})} - 1 \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) + o\left(\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 && \text{car } \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^3} > 0$. Or la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^3}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 3 > 1$. Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}$$

Solution de l'exercice 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} 1 - 2 \cos(2x) = 0 &\Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ OU } \exists k \in \mathbb{Z}, 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ OU } \exists k \in \mathbb{Z}, x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble de définition de f est donné par

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. Pour x proche de $\frac{\pi}{6}$ mais différent de $\frac{\pi}{6}$, posons, $h = x - \frac{\pi}{6}$. Alors $h \underset{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{6} \\ x \neq \frac{\pi}{6}}}{\rightarrow} 0$ et $x = \frac{\pi}{6} + h$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6} + h\right) &= \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - 1}{1 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2h\right)} \\ &= \frac{2\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(h) + \sin(h) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - 1}{1 - 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(2h) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(2h)\right)} \\ &= \frac{\cos(h) + \sqrt{3} \sin(h) - 1}{1 - \cos(2h) + \sqrt{3} \sin(2h)} \\ &\underset{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}}{=} \frac{1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2) + \sqrt{3}(h + o(h)) - 1}{1 - 1 + \frac{4h^2}{2} + o(h^2) + \sqrt{3}(2h + o(h))} \\ &\underset{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}}{=} \frac{\sqrt{3}h + o(h)}{2\sqrt{3}h + o(h)} \end{aligned}$$

Or $\sqrt{3}h + o(h) \underset{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}}{\sim} \sqrt{3}h$ et $2\sqrt{3}h + o(h) \underset{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}}{\sim} 2\sqrt{3}h$. Donc par quotient,

$$f\left(\frac{\pi}{6} + h\right) \underset{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}}{\sim} \frac{\sqrt{3}h}{2\sqrt{3}h} = \frac{1}{2}.$$

D'où

$$f(x) \underset{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{6} \\ x \neq \frac{\pi}{6}}}{\sim} \frac{1}{2}$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{6} \\ x \neq \frac{\pi}{6}}} f(x) = \frac{1}{2}.}$$