Exercice Printemps 05
Applications linéaires & Matrices

Exercice 1 Soit $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $s : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & AM \end{array}$.

1. Montrer que s est une symétrie.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de s.

Exercice 2 Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2 en fonction de M et I_3.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $M^n = a_n I_3 + b_n M$. et établir une expression de a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
3. Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 puis en déterminer une expression explicite.
4. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, M^n et retrouver les coefficients de M^3.