Correction Printemps 05
Applications linéaires & Matrices

Solution de l'exercice 1

1. Montrons que s est une symétrie.
   - Pour $M \in E$, puisque $A \in E$, on a bien $AM \in E$. Donc s est bien définie sur E et à valeurs dans E.
   - Montrons que s est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(M, N) \in E^2$. Posons $W = \lambda M + \mu N$. On a alors

$$\begin{aligned} s(\lambda M + \mu N) = s(W) &= AW \\ &= A(\lambda M + \mu N) \\ &= \lambda AM + \mu AN \\ &= \lambda s(M) + \mu s(N). \end{aligned}$$

   Donc s est linéaire et par le pointe précédente, s est un endomorphisme de E.
   - Montrons que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Soit $M \in E$. On a

$$s^2(M) = s(AM) = A(AM) = A^2M.$$

   Or

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

   Dès lors, $s^2(M) = M$, ceci étant vrai pour tout $M \in E$, on en déduit que

$$s^2 = \mathrm{Id}_E.$$

Conclusion,

$$\boxed{s \text{ est une symétrie.}}$$

2. Déterminons les éléments caractéristiques de s i.e. cherchons $F = \{M \in E \mid s(M) = M\}$ et $G = \{M \in E \mid s(M) = -M\}$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M \in F \quad &\Leftrightarrow \quad s(M) = M \\ &\Leftrightarrow \quad AM = M \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

De même,

$$\begin{aligned}
M \in G \quad &\Leftrightarrow \quad s(M) = -M \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} c = -a \\ d = -b \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion, s est une symétrie sur

$$\boxed{F = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right),}$$

parallèlement à

$$\boxed{G = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right).}$$

Solution de l'exercice 2

1. Calculons M^2 en fonction de M et I_3. On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

   On observe alors que

$$\boxed{M^2 = 3M - 2I_3.}$$

2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $M = a_n I_3 + b_n M$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $\exists\,(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2,\ M^n = a_n I_3 + b_n M$ ».
   Initialisation. Si $n = 0$. On a $M^0 = I_3$ et donc en posant $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, on a bien $(a_0, b_0) \in \mathbb{Z}^2$ et $M^0 = a_0 I_3 + b_0 M$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $M^n = a_n I_3 + b_n M$. Par suite,

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= MM^n \\
&= M(a_n I_3 + b_n M) && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= a_n M + b_n M^2 \\
&= a_n M + b_n(3M - 2I_3) && \text{par la question précédente} \\
&= (a_n + 3b_n)M - 2b_n I_3.
\end{aligned}$$

   Donc il existe bien $a_{n+1} = -2b_n \in \mathbb{Z}$ et $b_{n+1} = a_n + 3b_n \in \mathbb{Z}$ tel que $M^n = a_{n+1} I_3 + b_{n+1} M$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\exists\,(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2,\ M^n = a_n I_3 + b_n M.}$$

   De plus, on observe que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = -2b_n \\ b_{n+1} = a_n + 3b_n. \end{cases}}$$

3. Montrons que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 puis déterminons-en une expression explicite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par la question précédente,

$$b_{n+2} = a_{n+1} + 3b_{n+1} = -2b_n + 3b_{n+1}.$$

Conclusion, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+2} = 3b_{n+1} - 2b_n.}$$

L'équation caractéristique associée est

$$r^2 = 3r - 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad r^2 - 3r + 2 = 0.$$

Le discriminant associé est $\Delta = 9 - 8 = 1$ donc les racines sont données par $r = \frac{3\pm1}{2} = 2$ ou 1. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \lambda\, 2^n + \mu 1^n = \lambda\, 2^n + \mu.$$

Or on a vu que $b_0 = 0$. De plus, $M = 0 \times I_3 + 1 \times M$. Donc $b_1 = 1$. Ainsi

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 2\,\lambda + \mu = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mu = -1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = 2^n - 1.}$$

On peut vérifier son résultat avec b_2 car on a vu que $M^2 = 3M - 2I_3$ donc $b_2 = 3$. Or $2^2 - 1 = 3$ OK !

4. Déduisons-en pour tout $n \in \mathbb{N}$, M^n. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -2b_n$ donc par la question précédente, $a_{n+1} = -2\,(2^n - 1) = 2 - 2^{n+1}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 2 - 2^n$. Or $a_0 = 1$ donc la formule reste vraie si $n = 1$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 2 - 2^n.$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = a_n I_3 + b_n M$, on en conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = (2 - 2^n)\, I_3 + (2^n - 1)\, M.}$$

Ou encore

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2 - 2^{n+1} & 1 - 2^n \\ 2^n - 1 & 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.}$$

En particulier pour $n = 2$, on retrouve bien le résultat de la question 1,

$$\boxed{M^2 = \begin{pmatrix} 8-1 & 2-8 & 1-4 \\ 4-1 & 2-4 & 1-4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$