

Exercice Printemps 06

Dimension & Equation différentielle

Exercice 1 Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid (X+3)P = XP(X+1)\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Soit $P \in F$. Montrer que 0 et -2 sont des racines de P . Puis que -1 est aussi une racine de P .
3. En déduire que $F \subseteq \text{Vect}(X(X+1)(X+2), X^2(X+1)(X+2))$.
4. Montrer que $\mathcal{B}_F = (X(X+1)(X+2))$ est une base de F .
5. Montrer que $G = \text{Vect}(1, X, X^2, X^4)$ est un supplémentaire de F .

Exercice 2 Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation différentielle suivante d'inconnue y une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$:

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad xy'(x) - (2x^2 - 1)y(x) = x. \quad (E)$$