

## Correction Printemps 06

### Dimension & Equation différentielle

#### Solution de l'exercice 1

1. On observe que

- $F \subseteq \mathbb{R}_4[X]$  par définition.
- Si  $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ , alors  $(X+3)P = 0_{\mathbb{R}[X]} = XP(X+1)$ . Donc  $0_{\mathbb{R}[X]} \in F$ .
- Soient  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  et  $(P, Q) \in F^2$ . Posons  $R = \lambda P + \mu Q$ . Montrons que  $R \in F$ . On a les égalités entre polynômes suivantes :

$$\begin{aligned}(X+3)R &= (X+3)(\lambda P + \mu Q) \\ &= \lambda(X+3)P + \mu(X+3)Q \\ &= \lambda XP(X+1) + \mu XQ(X+1) && \text{car } P \in F \text{ et } Q \in F \\ &= X(\lambda P + \mu Q) \circ (X+1) \\ &= XR(X+1).\end{aligned}$$

Donc  $R \in F$  et  $F$  est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion,

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_4[X].$$

2. Soit  $P \in F$ , alors  $(X+3)P = XP(X+1)$ . Evaluons en 0. On a

$$3P(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(0) = 0.$$

Donc 0 est une racine de  $P$ . De plus, en évaluant en  $-3$ ,

$$0 = -3P(-2) \quad \Leftrightarrow \quad P(-2) = 0.$$

Donc  $-2$  est une racine de  $P$ . Enfin, on évalue en  $-1$  (cela marche aussi pour  $-2$ ) :

$$2P(-1) = -P(0) = 0 \text{ car } 0 \text{ racine de } P \quad \Leftrightarrow \quad P(-1) = 0.$$

Conclusion,

$$0, -1 \text{ et } -2 \text{ sont des racines de } P.$$

3. Soit  $P \in F$ . Par la question précédente, puisque 0,  $-1$ ,  $-2$  sont trois racines distinctes de  $P$ , alors  $X(X+1)(X+2)$  divise  $P$  : il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$P = X(X+1)(X+2)Q.$$

Or  $P \in F \subseteq \mathbb{R}_4[X]$ . Donc  $\deg(Q) \leq 1$ . Ainsi, il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $Q = aX + b$  i.e.

$$\begin{aligned}P &= X(X+1)(X+2)(aX+b) \\ &= bX(X+1)(X+2) + aX^2(X+1)(X+2).\end{aligned}$$

Donc  $P \in \text{Vect}(X(X+1)(X+2), X^2(X+1)(X+2))$ . Ceci étant vrai pour  $P \in F$  quelconque, on en conclut que

$$F \subseteq \text{Vect}(X(X+1)(X+2), X^2(X+1)(X+2)).$$

4. Soit  $P \in \text{Vect}(X(X+1)(X+2), X^2(X+1)(X+2))$ . Alors, il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$P = aX(X+1)(X+2) + bX^2(X+1)(X+2) = (a + bX)X(X+1)(X+2).$$

Alors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & (X+3)P = XP(X+1) \\ \Leftrightarrow & (a+bX)X(X+1)(X+2)(X+3) = X(a+bX+b)(X+1)(X+2)(X+3) \\ \Leftrightarrow & a+bX = a+b+bX \\ \Leftrightarrow & 0 = b \\ \Leftrightarrow & P = aX(X+1)(X+2) \\ \Leftrightarrow & P \in \text{Vect}(X(X+1)(X+2)). \end{aligned}$$

Donc

$$F = \text{Vect}(X(X+1)(X+2)) = \text{Vect}(\mathcal{B}_F).$$

Ainsi,  $\mathcal{B}_F$  engendre  $F$ . De plus,  $\mathcal{B}_F$  est composée d'un seul vecteur/polynôme non nul, donc  $\mathcal{B}_F$  est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{B}_F = (X(X+1)(X+2)) \text{ est une base de } F.}$$

5. Posons  $\mathcal{B}_G = (1, X, X^2, X^4)$  alors  $G = \text{Vect}(\mathcal{B}_G)$  et donc  $\mathcal{B}_G$  engendre  $G$ . La famille  $\mathcal{B}_G$  est une famille de polynômes de degrés distincts. Donc  $\mathcal{B}_G$  est libre (ou alors  $\mathcal{B}_G$  est libre en tant que sous-famille de  $(1, X, X^2, X^3, X^4)$  qui est libre car base canonique de  $\mathbb{R}_4[X]$ ). Donc  $\mathcal{B}_G$  est une base de  $G$ . Posons  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ . Alors,

$$\mathcal{B} = (X(X+1)(X+2), 1, X, X^2, X^4).$$

Puisque  $\deg(X(X+1)(X+2)) = 3$ ,  $\mathcal{B}$  est aussi une famille de polynômes de degrés distincts. Donc  $\mathcal{B}$  est libre. De plus  $\text{Card}(\mathcal{B}) = 5 = \dim(\mathbb{R}_4[X])$ . Donc  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}_4[X]$ . On a donc

- $\mathcal{B}_F$  base de  $F$ ,
- $\mathcal{B}_G$  base de  $G$ ,
- $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$  base de  $\mathbb{R}_4[X]$ .

Conclusion, par le théorème de la base adaptée :

$$\boxed{G = \text{Vect}(1, X, X^2, X^4) \text{ est un supplémentaire à } F \text{ dans } \mathbb{R}_4[X].}$$

Il est possible de montrer que  $\tilde{F} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid (X+3)P = XP(X+1)\}$  est toujours égal à  $F$  même si on ne suppose pas le degré plus petit que 4 : autrement dit l'équation  $(X+3)P = XP(X+1)$  n'admet pas d'autres solutions dans  $\mathbb{R}[X]$  que les  $\lambda X(X+1)(X+2)$ .

**Solution de l'exercice 2** Commençons par écrire l'équation « résolue » en  $y'$ . Sur  $]0; +\infty[$ , on a

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in ]0; +\infty[, \quad y'(x) - \left(2x - \frac{1}{x}\right)y(x) = 1 \quad \text{car } x \neq 0.$$

Considérons  $(E_0)$  l'équation homogène associée :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \quad y'(x) - \left(2x - \frac{1}{x}\right)y(x) = 0. \quad (E_0)$$

La fonction  $x \mapsto 2x - \frac{1}{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  (intervalle de  $\mathbb{R}$ ) et admet donc DES primitives sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus la fonction  $x \mapsto x^{\frac{2}{x}} - \ln(x)$  est UNE primitive de  $x \mapsto 2x - \frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Par conséquent l'ensemble  $\mathcal{S}_0$  des solutions de  $(E_0)$  est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \left\{ y : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto C e^{x^2 - \ln(x)} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto C \frac{e^{x^2}}{x} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Appliquons maintenant la méthode de variation de la constante. Soit  $z \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$  et posons pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $y_0(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$  et  $y(x) = z(x)y_0(x)$ . Puisque la fonction  $y_0$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on en déduit que  $y$  est dérivable si et seulement si  $z$  est dérivable et dans ce cas,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(x) = z'(x)y_0(x) + z(x)y_0'(x).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x)y_0(x) + z(x)y_0'(x) - \left(2x - \frac{1}{x}\right)z(x)y_0(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x)y_0(x) + z(x) \underbrace{\left(y_0'(x) - \left(2x - \frac{1}{x}\right)y_0(x)\right)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathcal{S}_0} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x)y_0(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x) = x e^{-x^2}. \end{aligned}$$

On reconnaît une fonction du type  $u' e^u$  avec  $u : x \mapsto -x^2$ . Donc une primitive de  $z'$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  est donnée par  $x \mapsto -\frac{e^{-x^2}}{2}$ . Par suite,

$$\begin{aligned} (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z(x) = -\frac{e^{-x^2}}{2} + C \\ &\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = z(x)y_0(x) = \left(-\frac{e^{-x^2}}{2} + C\right) \frac{e^{x^2}}{x} = \frac{-1}{2x} + C \frac{e^{x^2}}{x}. \end{aligned}$$

Conclusion, en notant  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions de  $(E)$ , et  $y_p : x \mapsto \frac{-1}{2x}$ , on obtient un espace affine de dimension 1 (un espace vectoriel translaté d'une solution particulière)

$$\mathcal{S} = \left\{ y : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{-1}{2x} + C \frac{e^{x^2}}{x} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\} = y_p + \text{Vect}(y_0).$$