Correction Printemps 07
Probabilités & Calcul d'intégrale

Solution de l'exercice 1 On note B l'évènement « être un bon conducteur » et A l'évènement « avoir un accident ». Par l'énoncé, on a $\mathbb{P}(B) = 0,8$, $\mathbb{P}(A \mid B) = 0,1$ et $\mathbb{P}\left(A \,\middle|\, \overline{B}\right) = 0,5$.

1. Déterminons la probabilité qu'un client ait un accident dans l'année. On cherche $\mathbb{P}(A)$. Puisque $\left(B, \overline{B}\right)$ forme un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}\left(A \,\middle|\, \overline{B}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)\\ &= 0,1 \times 0,8 + 0,5 \times (1 - 0,8)\\ &= 0,08 + 0,1\\ &= 0,18.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = 0,18.}$$

2. Calculons la probabilité qu'un client ayant eu un accident dans l'année soit un mauvais conducteur. On cherche $\mathbb{P}\left(\overline{B} \,\middle|\, A\right)$. Puisque $\mathbb{P}(A) \neq 0$, par la formule de Bayes et la question précédente,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{B} \,\middle|\, A\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(A \,\middle|\, \overline{B}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)}{\mathbb{P}(A)}\\ &= \frac{0,5 \times 0,2}{0,18}\\ &= \frac{0,1}{0,18}\\ &= \frac{10}{18}\\ &= \frac{5}{9}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\overline{B} \,\middle|\, A\right) = \frac{5}{9}.}$$

Solution de l'exercice 2 On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$ et donc la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ est définie et même continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\left[0; \frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{2}\right] = [0; \mathrm{sh}(1)]$. Donc $\boxed{\text{l'intégrale } I \text{ existe}}$. On pose $x = \mathrm{sh}(t)$. La fonction sh est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;1]$ et on a $\mathrm{d}x = \mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t$. Donc par le théorème de changement de variable,

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 \frac{\mathrm{sh}^2(t)}{\sqrt{\mathrm{sh}^2(t)+1}}\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{sh}^2(t)}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(t)}}\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{CAR } \mathrm{ch}(t) \geqslant 0\\ &= \int_0^1 \mathrm{sh}^2(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On linéarise $\mathrm{sh}^2(t)$ ou bien par une formule directe (de la formule $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$, on en déduit que $(i\,\mathrm{sh}(t))^2 = \frac{1-\mathrm{ch}(2t)}{2}$ i.e. $\mathrm{sh}^2(t) = \frac{\mathrm{ch}(2t)-1}{2}$) ou bien on redémontre la formule en développant. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{sh}^2(t) = \left(\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t} - 2}{4} = \frac{\mathrm{ch}(2t) - 1}{2}.$$

Par conséquent,

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(2t) - 1}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{sh}(2t)}{4} - \frac{t}{2}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{\mathrm{sh}(2)}{4} - \frac{1}{2} - 0.$$

Conclusion

$$\boxed{I = \frac{\mathrm{sh}(2) - 2}{4}.}$$