Correction Printemps 08
Dénombrement & calcul dans $\mathbb{R}$

Solution de l'exercice 1

1. On tire simultanément 5 boules.
   (a) Comptons le nombre de tirages. Puisque les boules de même couleur sont indiscernables, nous n'avons que les résultats suivants : 5 boules rouges 0 boules vertes ou 1 boule verte et 4 boules rouges ou 2 boules vertes et 3 boules rouges etc. On choisit le nombre de vertes obtenues : de 0 à 5 nous avons 6 choix. Puis l'on complète avec des boules rouges pour avoir 5 boules, une seule façon. Au total :
   $$\boxed{\text{6 tirages possibles.}}$$
   (b) Comptons le nombre de tirages amenant 2 boules vertes et 3 boules rouges. On choisit les deux boules vertes : une seule façon puisqu'elles sont indiscernables. On choisit les 3 boules rouges, une seule façon également. Conclusion :
   $$\boxed{\text{1 seul tirage possible.}}$$
2. On tire successivement et avec remise 5 boules.
   (a) Comptons le nombre de tirages. Il choisit de choisir à chaque tirage s'il l'on a obtenu une boule verte ou une boule rouge. Il s'agit donc d'un tirage avec remise de 5 éléments parmi un ensemble ne contenant que deux issues : verte ou rouge. C'est donc un 5-uplet dans un ensemble de cardinal 2 :
   $$\boxed{2^5 \text{ tirages possibles.}}$$
   (b) Comptons le nombre de tirages amenant 2 boules vertes et 3 boules rouges. On choisit la place des deux boules vertes :
   $$\binom{5}{2} \text{ possibilités.}$$
   On y place deux boules vertes : une seule façon puisqu'elles sont indiscernables. On complète alors avec trois boules rouges dans les autres places :
   $$1 \text{ possibilité.}$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\binom{5}{2} \text{ tirages possibles.}}$$
3. On tire successivement et sans remise 5 boules.
   (a) Comptons le nombre de tirages. Puisqu'il y a suffisamment de boules vertes et rouges pour obtenir toutes les configurations et que les boules de même couleur sont indiscernables, le résultat est le même qu'à la question 2a (peu importe finalement comment l'on obtient $VRRVR$ par exemple que ce soit avec ou sans remise)
   $$\boxed{2^5 \text{ tirages possibles.}}$$
   (b) Comptons le nombre de tirages amenant 2 boules vertes et 3 boules rouges. De même, on obtient,
   $$\boxed{\binom{5}{2} \text{ tirages possibles.}}$$

On suppose maintenant les boules discernables. Les boules vertes sont numérotées de 1 à 5 et les boules rouges de 1 à 10.

4. On tire simultanément 5 boules.
   (a) Comptons le nombre de tirages. Puisque toutes les boules sont discernables, il s'agit de piocher 5 boules dans un ensemble en contenant 15 :
   $$\boxed{\binom{15}{5} \text{ tirages possibles.}}$$
   (b) Comptons le nombre de tirages amenant 2 boules vertes et 3 boules rouges. On choisit les deux boules vertes :
   $$\binom{5}{2} \text{ tirages possibles.}$$
   On choisit maintenant les boules rouges :
   $$\binom{10}{3} \text{ tirages possibles.}$$
   Au total :
   $$\boxed{\binom{5}{2}\binom{10}{3} \text{ tirages possibles.}}$$
5. On tire successivement et avec remise 5 boules.
   (a) Comptons le nombre de tirages. Il s'agit ici de la construction d'un 5-uplet dans un ensemble contenant 15 éléments :
   $$\boxed{15^5 \text{ tirages possibles.}}$$
   (b) Comptons le nombre de tirages amenant 2 boules vertes et 3 boules rouges. On choisit la place des deux boules vertes : $\binom{5}{2}$ choix possibles. On choisit ensuite les deux boules vertes : on construit un 2-uplet dans un ensemble en contenant 5 : 5^2 choix possibles. On choisit enfin les trois rouges à placer dans les places restantes : 10^3 choix possibles. Au total :
   $$\boxed{\binom{5}{2}5^2 10^3 = \binom{5}{2}5^5 2^3 \text{ tirages possibles.}}$$
6. On tire successivement et sans remise 5 boules.
   (a) Comptons le nombre de tirages. Il s'agit ici de la construction d'un arrangement de 5 éléments parmi 15 :
   $$\boxed{A_{15}^5 \text{ tirages possibles.}}$$
   (b) Comptons le nombre de tirages amenant 2 boules vertes et 3 boules rouges. On choisit la place des deux boules vertes : $\binom{5}{2}$ choix possibles. On pioche ensuite successivement et sans remise deux boules vertes parmi les cinq possibles : A_5^2 choix possibles. Enfin on pioche 3 rouges parmi les 10 possibles : A_{10}^3. Conclusion,
   $$\boxed{\binom{5}{2}A_5^2 A_3^{10} \text{ tirages possibles.}}$$

Solution de l'exercice 2 Soit $x \in \mathbb{R}$. On commence par observer que

$$(I) \text{ est bien définie} \quad\Leftrightarrow\quad x^2-4 \neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 \neq 4 \quad\Leftrightarrow\quad x \neq -2 \text{ ET } x \neq 2.$$

Fixons désormais $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$.
Afin de multiplier l'inégalité par x^2-4, il nous faut connaître son signe. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$. On a

$$x^2-4>0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x<-2 \text{ OU } x>2.$$

Premier cas. Soit $x \in \left]-\infty;-2\right[\cup \left]2;+\infty\right[$. Alors, $x^2-4>0$. Donc

$$(I) \qquad \Leftrightarrow \qquad x^3-x^2-2x \leqslant -x^2+4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^3-2x-4 \leqslant 0.$$

On observe que 2 est une racine « évidente » de x^3-2x-4. En effet, si $x=2$, $x^3-2x-4=8-4-4=0$.
Donc il est possible de factoriser x^3-2x-4 par $(x-2)$ comme suit :

$$x^3-2x-4=(x-2)\left(x^2+2x+2\right).$$

Ainsi,

$$(I) \qquad \Leftrightarrow \qquad (x-2)\left(x^2+2x+2\right) \leqslant 0.$$

Soit Δ le discriminant de x^2+2x+2. On a $\Delta=4-8=-4<0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+2x+2>0$.
Ainsi, pour $x \in \left]-\infty;-2\right[\cup \left]2;+\infty\right[$, on obtient :

$$(I) \qquad \Leftrightarrow \qquad x-2 \leqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \leqslant 2.$$

Or $x \in \left]-\infty;-2\right[\cup \left]2;+\infty\right[$. Conclusion, dans ce cas, l'ensemble des solutions est

$$\mathscr{S}_1=\left]-\infty;-2\right[.$$

Second cas. Soit $x \in \left]-2;2\right[$. On a alors $x^2-4<0$. Donc

$$(I) \qquad \Leftrightarrow \qquad x^3-x^2-2x \geqslant -x^2+4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^3-2x-4 \geqslant 0.$$

On comme vu précédemment, $x^3-2x-4=(x-2)\left(x^2+2x+2\right)$ et $x^2+2x+2>0$. Donc

$$(I) \qquad \Leftrightarrow \qquad (x-2)\left(x^2+2x+2\right) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x-2 \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \geqslant 2.$$

Or $x \in \left]-2;2\right[$. Dans ce cas,

$$\mathscr{S}_2=\emptyset.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (I) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}=\mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2=\left]-\infty;-2\right[.}$$