

Correction Printemps 09

Applications linéaires & équation complexe

Solution de l'exercice 1

1. Montrons que $\text{Im}(f^2) \subseteq \text{Im}(f)$. Soit $y \in \text{Im}(f^2)$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = f^2(x)$. Donc $y = f(f(x))$. Posons $x' = f(x)$. Alors $y = f(x')$. Ainsi, $y \in \text{Im}(f)$. Ceci étant vrai pour tout $y \in \text{Im}(f^2)$, on en conclut que

$$\boxed{\text{Im}(f^2) \subseteq \text{Im}(f)}.$$

Montrons que $\text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(f^2)$. Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0_E$. Donc directement

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(0_E) = 0_E \quad \text{car } f \text{ est linéaire.}$$

Donc $x \in \text{Ker}(f^2)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \text{Ker}(f)$, on en conclut que

$$\boxed{\text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(f^2)}.$$

2. Déduisons-en que $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$. On sait par la question précédente que $\text{Im}(f^2) \subseteq \text{Im}(f)$. De plus par hypothèse,

$$\dim(\text{Im}(f^2)) = \text{rg}(f^2) = \text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)}.$$

De même, on a vu que $\text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(f^2)$. Or par le théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E) - \text{rg}(f).$$

De même,

$$\dim(\text{Ker}(f^2)) = \dim(E) - \text{rg}(f^2).$$

Comme $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2)$, nécessairement,

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\text{Ker}(f^2)).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)}.$$

3. Montrons que $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont en somme directe. Soit $x \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$. Par définition, il existe $a \in E$ tel que $f(a) = x$ et $f(x) = 0_E$ donc $f^2(a) = f(f(x)) = 0_E$. Donc $a \in \text{Ker}(f^2)$. Par la question précédente, $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$ donc $a \in \text{Ker}(f)$ i.e. $f(a) = 0_E$. D'où $x = f(a) = 0_E$. Dès lors, on a $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) \subseteq \{0_E\}$. Or $\{0_E\} \subseteq \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$. Donc

$$\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Im}(f) \text{ et } \text{Ker}(f) \text{ sont en somme directe.}}$$

4. Dédudions-en que $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires. On sait déjà que $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$. De plus, par le théorème du rang,

$$\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E).$$

Conclusion,

$\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires.

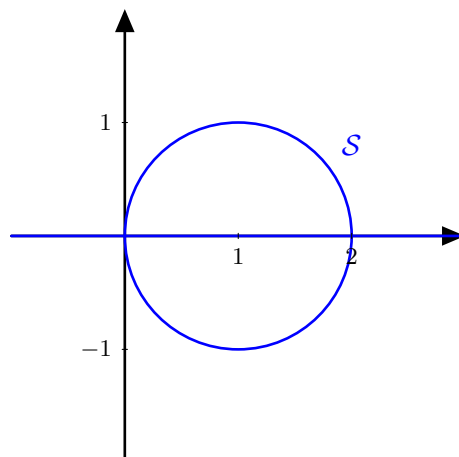
Solution de l'exercice 2 Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 1$ alors M et P sont confondus et donc M , N et P sont alignés. Supposons maintenant que $z \neq 1$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 M, N, P \text{ sont alignés} &\Leftrightarrow \overrightarrow{NP} \text{ et } \overrightarrow{MN} \text{ sont colinéaires} \\
 &\Leftrightarrow \arg(z_P - z_N) - \arg(z_M - z_N) \equiv 0 \pmod{\pi} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1 + z^2 - 1}{z - 1} \in \mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow \frac{z^2}{z - 1} \in \mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow \frac{z^2}{z - 1} = \overline{\left(\frac{z^2}{z - 1}\right)} \\
 &\Leftrightarrow \frac{z^2}{z - 1} = \frac{\bar{z}^2}{\bar{z} - 1} \\
 &\Leftrightarrow z^2(\bar{z} - 1) = \bar{z}^2(z - 1) \quad \text{car } z \neq 1 \text{ et donc } \bar{z} \neq 1 \\
 &\Leftrightarrow z|z|^2 - z^2 = |z|^2\bar{z} - \bar{z}^2 \\
 &\Leftrightarrow |z|^2(z - \bar{z}) = z^2 - \bar{z}^2 \\
 &\Leftrightarrow |z|^2 2i\text{Im}(z) = (z - \bar{z})(z + \bar{z}) \\
 &\Leftrightarrow |z|^2 2i\text{Im}(z) = 2i\text{Im}(z) \times 2\text{Re}(z) \\
 &\Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \text{ OU } |z|^2 = 2\text{Re}(z) \\
 &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ OU } |z|^2 - 2\text{Re}(z) = 0.
 \end{aligned}$$

On observe que la solution $z = 1$ est bien contenue dans \mathbb{R} . D'autre part, soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$. Alors,

$$|z|^2 - 2\text{Re}(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 - 2a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a - 1)^2 - 1 + b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a - 1)^2 + b^2 = 1.$$

Conclusion, l'ensemble solution est l'union de la droite des abscisses et du cercle de centre $\Omega(1)$ et de rayon $\sqrt{1} = 1$.



Vérification, si $z = 1 + i$ par exemple, nous sommes bien sur le cercle en question sur la droite $x = 1$. Donc M et N sont sur la droite $x = 1$. Vérifions que P aussi. Dans ce cas, l'affixe de P vaut $1 + z^2 = 1 + (1 + i)^2 = 1 + 1 + 2i - 1 = 1 + 2i$. Donc M, N et P sont bien alignés !