Correction Printemps 10
Série & fonction usuelle

Solution de l'exercice 1 Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$. Par croissance comparée, on a

$$\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geqslant 2$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln(n) \leqslant \sqrt{n}.$$

Dès lors,

$$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}} = \frac{1}{n} > 0.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge en tant que série harmonique ou de Riemann d'exposant $\alpha = 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on conclut que

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)} \text{ diverge.}}$$

Solution de l'exercice 2

1. Déterminons $\mathcal{D}$ le domaine de définition de f. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 \leqslant \frac{1-x}{1+x} \leqslant 1 \\ 1+x \neq 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -(1+x) \leqslant 1-x \leqslant 1+x \\ x \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{car si } x \geqslant 0,\ 1+x \geqslant 1 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1-x \leqslant 1-x \\ 1-x \leqslant 1+x \\ x \geqslant 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant 2x \\ x \geqslant 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad x \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}_+.}$$

2. Déterminons $\mathcal{D}'$ le domaine de dérivabilité de f. Soit $x \geqslant 0$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{D}' \quad & \Leftarrow \quad \begin{cases} -1 < \frac{1-x}{1+x} < 1 \\ 1+x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1-x < 1-x < 1+x \\ x > 0 \end{cases} \qquad \text{car } 1+x > 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad x > 0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D}' = \mathbb{R}_+^*.}$$

3. Simplifions l'expression de f sur $\mathcal{D}$. La fonction f est donc dérivable sur $\mathcal{D}'$ par la question précédente et pour tout $x \in \mathcal{D}' = \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}} - 2\frac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2} \\
&= \frac{-\left(\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}\right)}{\sqrt{\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1+x)^2}}} - 2\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} \\
&= \frac{-\left(\frac{-2}{(1+x)^2}\right)}{\frac{\sqrt{(1+x-1+x)(1+x+1-x)}}{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)} \qquad \text{car } 1+x > 0 \\
&= \frac{2}{(1+x)\sqrt{4x}} - \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)} \\
&= \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = K.$$

Or la fonction f est continue sur son domaine de définition en tant que composée et somme de fonctions qui le sont donc notamment en 0. Donc

$$f(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} K = K.$$

Ainsi la formule reste vraie en 0 et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = K.$$

En particulier, pour $x = 0$,

$$K = f(0) = \arccos(1) - 2\arctan(0) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = 0.}$$

Vérification : si $x = 1$, $f(1) = \arccos(0) - 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{4} = 0$ *OK ! Ou encore* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \arccos(-1) - 2\frac{\pi}{2} = \pi - \pi = 0$ *OK !*