Correction Printemps 11
Probabilités & Calcul algébrique

Solution de l'exercice 1

1. On suppose dans cette question que $N = 5$. calculons la probabilité de piocher dans cet ordre une verte, une rouge, une verte. On cherche donc lorsque $N = 5$, $\mathbb{P}_{(N=5)}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1)$. Par la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}_{(N=5)}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) = \mathbb{P}_{(N=5)}(X_1 = 1)\mathbb{P}_{(N=5)}(X_2 = 0 \mid X_1 = 1) \times \mathbb{P}_{(N=5)}(X_3 = 1 \mid X_1 = 1, X_2 = 0).$$

Puisque $N = 5$, on pioche dans l'urne U_5 qui contient initialement 5 boules vertes et $n - 5 \geqslant 1$ boules rouges. Dès lors le tirage étant considéré uniforme parmi les boules de U_5, $\mathbb{P}_{(N=5)}(X_1 = 1) = \frac{5}{n-5}$. Puis, sachant que l'on a retiré une boule verte, il reste 4 boules vertes et $n - 5$ boules rouges donc

$$\mathbb{P}_{(N=5)}(X_2 = 0 \mid X_1 = 1) = \frac{n-5}{n-1}.$$

De même $\mathbb{P}_{(N=5)}(X_3 = 1 \mid X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{4}{n-2}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}_{(N=5)}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) = \frac{5}{n-5}\frac{n-5}{n-1}\frac{4}{n-2} = \frac{20}{(n-1)(n-2)}.$$

Conclusion,

$$boxed\mathbb{P}_{(N=5)}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) = \frac{20}{(n-1)(n-2)}.$$

2. Déterminons la loi de N. On note que $N(\Omega) = [\![1;n]\!]$ cependant les résultats ne sont pas uniformes. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on a k jetons numéros k. Et puisque l'on a 1 jeton 1, 2 jetons 2, ..., n jetons n au total on a

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ jetons.}$$

Donc

$$\mathbb{P}(N = k) = \frac{k}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2k}{n(n+1)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{N(\Omega) = [\![1;n]\!], \qquad \forall k \in [\![1;n]\!], \quad \mathbb{P}(N = k) = \frac{2k}{n(n+1)}.}$$

3. Déduisons-en la loi de X_1. On note que $X_1(\Omega) = \{0;1\}$ donc X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_1 = \mathbb{P}(X_1 = 1)$. La famille $(N = k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ forme un système complet d'évènements. Ainsi, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_1 = 1 \mid N = k)\,\mathbb{P}(N = k).$$

Or si l'on tire dans l'urne k, on a k boules vertes et $n - k$ boules rouges donc $\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid N = k) = \frac{k}{n}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_1 = 1\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{2k}{n\left(n+1\right)} \\
&= \frac{2}{n^2\left(n+1\right)} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{2}{n^2\left(n+1\right)} \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6} \\
&= \frac{2n+1}{3n}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{X_1 \sim \mathscr{B}\left(\frac{2n+1}{3n}\right).}$$

4. Montrons que N et X_1 ne sont pas indépendantes. Calculons, par ce qui précède,
$$\mathbb{P}\left(X_1 = 1 \mid N = 1\right) = \frac{1}{n}.$$
Donc par la question précédente,
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_1 = 1 \mid N = 1\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = 1\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} = \frac{2n+1}{3n} \\
&\Leftrightarrow \quad 3 = 2n+1 \\
&\Leftrightarrow \quad 2n = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad n = 1.
\end{aligned}$$
Or $n \geqslant 6$. Donc $\mathbb{P}\left(X_1 = 1 \mid N = 1\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = 1\right)$. Conclusion,
$$\boxed{N \text{ et } X_1 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

5. Calculons $\mathbb{P}\left(N = 5 \mid X_1 = 1\right)$. Puisque $\mathbb{P}\left(X_1 = 1\right) \neq 0$, par la formule de Bayes,
$$\mathbb{P}\left(N \leqslant 5 \mid X_1 = 1\right) = \frac{\mathbb{P}\left(X_1 = 1 \mid N = 5\right)\mathbb{P}\left(N = 5\right)}{\mathbb{P}\left(X_1 = 1\right)}.$$
Par ce qui précède,
$$\mathbb{P}\left(N \leqslant 5 \mid X_1 = 1\right) = \frac{\frac{5}{n} \times \frac{2\times 5}{n(n+1)}}{\frac{2n+1}{3n}} = \frac{150}{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{P}\left(N \leqslant 5 \mid X_1 = 1\right) = \frac{150}{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}.}$$

Solution de l'exercice 2 L'astuce est de voir que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(u_k - u_{k+1}\right),$$

où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \frac{1}{k!}$. On reconnaît ainsi une somme télescopique et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = u_0 - u_{n+1} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

On a donc montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.}$$