# Fiche de révisions : équations complexes

## I Le cours

1. Définir l'exponentielle complexe.
2. Préciser $|\mathrm{e}^z|$, $\arg(\mathrm{e}^z)$, $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^z)$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^z)$.
3. Définir une racine carrée complexe.
4. Enoncer la proposition retournant les racines carrées d'un complexe.
5. Donner les racines d'un trinôme. On veillera à bien définir toutes les quantités.
6. Enoncer la proposition reliant les coefficients d'un trinôme à ses racines.
7. Définir l'ensemble des racines $n$-ièmes de l'unité. Que dire du produit de deux racines $n$-ième de l'unité ? de l'inverse d'une racine $n$-ième de l'unité ? de son conjugué ?
8. Caractériser l'ensemble des racines $n$-ièmes de l'unité.
9. Définir $j$. Que vaut $j^2$ ? $j^3$ ? $1+j+j^2$ ?
10. Caractériser les racines $n$-ièmes de l'unité par une somme.
11. Factoriser $z^n-1$ et $1+z+\cdots+z^{n-1}$.
12. Enoncer la propriété donnant les racines $n$-ièmes d'un complexe quelconque.
13. Caractériser l'alignement des trois points et les triangles rectangles.
14. Donner l'application complexe associée à une translation, une rotation et une homothétie.

## II Les savoir-faire

1. Manipuler l'exponentielle complexe, savoir résoudre une équation avec de l'exponentielle complexe.
2. Savoir calculer les deux racines carrées d'un complexe :
   - par la forme polaire en priorité lorsque c'est possible,
   - sinon par la forme algébrique : $\omega^2=z \Leftrightarrow \begin{cases}\omega^2=z\\ |\omega|^2=|z|\end{cases} \Leftrightarrow \dots$
3. Résoudre une équation du second degré.
4. Déterminer les racines d'un complexe de plus haut degré :
   - par la factorisation en trouvant une racine « évidente »
   - en déterminant les racines réelles ($z=x$) et/ou imaginaires pures ($z=iy$), puis en factorisant.
5. Savoir donner les racines $n$-ièmes de 1 ou d'un complexe $z$ quelconque.
6. Savoir manipuler une racine $n$-ième de l'unité avec les relations suivantes :
$$\omega^n=1, \qquad 1+\omega+\cdots+\omega^{n-1}=0.$$
7. Résoudre une équation de la forme $Z_1^n=Z_2^n$ ou $1+Z+Z^2+\cdots+Z^n=0$.
8. Savoir passer d'un problème géométrique à une équation complexe et réciproquement.
9. Savoir représenter graphiquement un ensemble de complexes.
10. Savoir reconnaître une similitude :
    - on cherche $\omega$ le point fixe,
    - on réécrit l'équation $s(z)=a(z-\omega)+\omega$,
    - on conclut.

# III Les erreurs à éviter

1. L'exponentielle complexe n'est jamais nulle mais n'est pas forcément positive : un complexe quelconque n'a pas de signe. JAMAIS d'inégalité dans $\mathbb{C}$ !
2. Le symbole $\sqrt{\cdot}$ est strictement réservé aux réels positifs. Ne jamais écrire $\sqrt{-3}$, $\sqrt{i}$ ou $\sqrt{5+2i}$.
3. Ne pas confondre les racines $n$-ièmes de l'unité avec les racines $n$-ièmes de $z$.
4. Il y a toujours $n$ racines $n$-ièmes. L'indice $k$ varie donc entre 0 et $n-1$ et non entre 0 et $n$.
5. Ne pas confondre $\mathbb{U}_n$ et $\mathbb{U}$.
6. Ne pas confondre $i$ et $j$. Le $j$ en physique n'est pas le même que celui en maths.
7. $z+iz'=0$ n'implique pas $z=z'=0$ sauf si $z$ et $z'$ sont tous les deux réels.

# IV Les réponses du cours

1. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^a\cos(b) + i\,\mathrm{e}^a\sin(b)$.
2. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a
$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^a, \quad \arg(\mathrm{e}^z) \equiv b\ [2\pi], \quad \mathrm{Re}(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^a\cos(b), \quad \mathrm{Im}(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^a\sin(b).$$
3. Soit $(z,\omega) \in \mathbb{C}^2$. On dit que $\omega$ est une racine carrée de $z$ si et seulement si $\omega^2 = z$.
4. Soit $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Alors l'équation $\omega^2 = z$ d'inconnu $\omega \in \mathbb{C}$ admet exactement deux solutions données par :
$$\omega_1 = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = -\omega_1 = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}.$$
5. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$.
   - Si $\Delta = 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une unique solution $z_0 = -\frac{b}{2a}$.
   - Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet exactement deux solutions données par
   $$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a},$$
   où $\delta$ est UNE racine carrée de $\Delta$.
6. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ et $z_1$ et $z_2$ les deux racines (éventuellement confondues) de $az^2 + bz + c$. Alors,
$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$\mathbb{U}_n = \{\, z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \,\}.$$
De plus, pour tout $(z,z') \in \mathbb{U}_n$, on a
$$zz' \in \mathbb{U}_n, \qquad \frac{1}{z} = \overline{z} \in \mathbb{U}_n.$$
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a l'égalité suivante :
$$\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \;\middle|\; k \in [\![0; n-1]\!] \right\}.$$
9. On a $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$. De plus,
$$j^2 = \overline{j}, \qquad j^3 = 1 \qquad \text{et} \qquad 1 + j + j^2 = 0.$$
10. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{n-1} z^k = 1 + z + \cdots + z^{n-1} = 0.$$
11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a
$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(z - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{2}}\right) \quad \text{et} \quad 1 + z + \cdots + z^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(z - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{2}}\right).$$
12. Soit $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, on a
$$\omega^n = z \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad \omega = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}.$$
13. Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ trois points distincts. On a
   - $A$, $B$ et $C$ alignés si et seulement si $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv 0\ [\pi]$ i.e. $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$.
   - $ABC$ rectangle en $A$ si et seulement si $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ i.e. $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}$.
14. - Soit $b \in \mathbb{C}$. La translation de vecteur $\vec{u}(b)$ est caractérisée par
$$\tau_{\vec{u}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + b. \end{array}$$

- Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$. La rotation d'angle $\theta$ et de centre $\Omega\,(\omega)$ est caractérisée par

$$r_{\Omega,\theta} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \mathrm{e}^{i\,\theta}\,(z-\omega)+\omega\,. \end{array}$$

- Soient $k \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$. L'homothétie de rapport $k$ et de centre $\Omega\,(\omega)$ est caractérisée par

$$h_{\Omega,k} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & k\,(z-\omega)+\omega\,. \end{array}$$