Fiche de révisions : calcul d'intégrales

I Le cours

1. Donner une condition suffisante pour l'existence d'une primitive.
   Donner l'ensemble des primitives d'une fonction à partir d'une.
2. Définir une fonction $\mathscr{C}^1$.
3. Enoncer le théorème fondamental de l'analyse.
4. Enoncer l'inégalité triangulaire pour l'intégrale.
5. Enoncer la croissance de l'intégrale.
6. Enoncer la séparation de l'intégrale.
7. Enoncer le théorème d'intégration par parties.
8. Enoncer le théorème de changement de variable.
9. Enoncer le théorème de décomposition en éléments simples.

$u'u^\alpha$, $\alpha \neq 1$	.....
$\frac{u'}{u}$	.....
$u'\,\mathrm{e}^u$	.....
$u'\ln(u)$	.....
$u'\cos(u)$	.....
$u'\sin(u)$	.....
$\frac{u'}{\cos^2(u)}$	.....

$u'\tan(u)$	.....
$u'\,\mathrm{ch}(u)$	.....
$u'\,\mathrm{sh}(u)$	.....
$\frac{u'}{1+u^2}$	.....
$\frac{u'}{a+u^2}$	.....
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	.....

II Les savoir-faire

1. Savoir énoncer le théorème fondamental de l'analyse pour chercher une primitive.
2. Savoir reconnaître directement une primitive à l'aide des primitives usuelles.
3. Savoir faire une intégration par parties. On trouve au brouillon qui on veut primitiver (ce sera u') et qui on veut dériver (ce sera v). On en déduit u et v. On pose au propre u et v et dit qu'elles sont $\mathscr{C}^1$ et on calcule u' et v'. On énoncer ensuite le théorème d'intégration par parties.
4. Savoir faire un changement de variable : on pose $x = \varphi(t)$ on obtient (quand on peut) $t = \varphi^{-1}(x)$. On change les bornes, si $t = a$, que vaut x et si $t = b$ que vaut x. On dit que φ est $\mathscr{C}^1$ et on calcule $\mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. On effectue alors le changement de variable :
   - on change les bornes,
   - on change la fonction,
   - on change le $\mathrm{d}t$.
5. Savoir intégrer $\frac{P(x)}{u(x)}$ avec P un polynôme et $u(x)$ un trinôme.
   - **Etape 1 :** on effectue la division euclidienne de P par u : $P(x) = E(x)u(x) + \alpha x + \beta$. On a alors
   $$\frac{P(x)}{u(x)} = E(x) + \frac{\alpha x + \beta}{u(x)}.$$
   - **Etape 2 :** on fait apparaître du u'/u. On obtient,
   $$\frac{P(x)}{u(x)} = E(x) + \lambda\,\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{\gamma}{u(x)}.$$

- **Etape 3 :**
  - Si $\Delta > 0$, on factorise $u(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ et on décompose en éléments simples $\frac{\gamma}{u(x)}$:
$$\frac{\gamma}{u(x)} = \frac{c_1}{x-x_1} + \frac{c_2}{x-x_2}$$
qui se primitive en $F : x \mapsto c_1 \ln(|x-x_1|) + c_2 \ln(|x-x_2|) + K$.
  - Si $\Delta = 0$, on a directement $\frac{\gamma}{u(x)} = \frac{c}{(x-x_0)^2}$ qui se primitive en $x \mapsto -\frac{c}{x-x_0} + K$.
  - Si $\Delta < 0$, on fait apparaître la forme canonique de $u(x) = (x-x_0)^2 + \alpha^2$. On a alors,
$$\frac{\gamma}{u(x)} = \frac{\gamma}{\alpha^2} \frac{1}{\left(\frac{x-x_0}{\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\frac{1}{\alpha}}{\left(\frac{x-x_0}{\alpha}\right)^2 + 1}$$
qui se primitive en $x \mapsto \frac{\gamma}{\alpha} \arctan\left(\frac{x-x_0}{\alpha}\right) + K$.

6. Savoir encadrer une suite d'intégrales à l'aide de la croissance de l'intégrale.
7. Savoir obtenir une relation de récurrence sur une suite d'intégrale grâce à une intégration par partie.

III Les erreurs à éviter

1. Oublier le dt ou le dx. Erreur très courante !!
2. Ecrire la même variable dans l'intégrale que sur une borne : $\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x$. La variable d'intégration est muette et ne doit pas être la même qu'une variable déjà définie/fixée.
3. On ne primitive une fonction QUE sur un intervalle. Par exemple, on ne peut pas primitiver une fonction sur $\mathbb{R}^*$.
4. Dans le théorème fondamentale de l'analyse la borne du bas a est fixée tandis que la borne du haut x est la variable.
5. Ne pas écrire une intégration par parties en posant v et u'. Il faut poser u et v PUIS calculer u' et v' dans la rédaction.
6. Ne pas oublier la constante lorsque l'on veut l'ensemble des primitives.

IV Les réponses du cours

1. Si une fonction f est continue sur un intervalle I alors elle admet des primitives sur cet intervalle.
   Si F est une primitive de f sur I alors, l'ensemble des primitives de f est donné par
$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & F(x)+K \end{array} \middle| \; K \in \mathbb{K} \right\}.$$
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est $\mathscr{C}^1$ sur I noté $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ si et seulement si
   - f est dérivable sur I
   - f' est continue sur I.
3. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $A \in \mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$. Si f est continue sur I alors la fonction F définie par
$$F : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & A + \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \end{array}$$
   est $\mathscr{C}^1$ sur I et est l'unique primitive de f telle que $F(a) = A$.
4. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a;b], \mathbb{K})$. Alors,
$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$
5. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $a < b$, et $(f,g) \in \mathscr{C}([a;b], \mathbb{R})^2$ telles que
$$\forall t \in [a;b], \qquad f(t) \leqslant g(t).$$
   Alors,
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$
6. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$ et $f \in \mathscr{F}([a;b], \mathbb{R})$. On suppose que
   - La fonction f est continue sur $[a;b]$,
   - la fonction f est positive sur $[a;b]$,
   - $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

   Alors pour tout $t \in [a;b]$, $f(t) = 0$.
7. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et u et v deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$. Alors
$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$
8. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to J$ une fonction $\mathscr{C}^1$ sur I, $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur J. Alors, pour tout $(a,b) \in I^2$,
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$
9. Soient P un polynôme, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ des réels deux à deux **distincts**. Alors il existe E un polynôme et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad \frac{P(x)}{(x-x_1)\ldots(x-x_n)} = E(x) + \frac{a_1}{x-x_1} + \cdots + \frac{a_n}{x-x_n}.$$

$u'u^\alpha$, $\alpha \neq 1$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert) + K$
$u'\,\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u + K$
$u'\ln(u)$	$u\ln(u) - u + K$
$u'\cos(u)$	$\sin(u) + K$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u) + K$
$\frac{u'}{\cos^2(u)}$	$\tan(u) + K$

$\frac{u'}{\cos^2(u)}$	$\tan(u) + K$
$u'\tan(u)$	$-\ln(\lvert\cos(u)\rvert) + K$
$u'\,\mathrm{ch}(u)$	$\mathrm{sh}(u) + K$
$u'\,\mathrm{sh}(u)$	$\mathrm{ch}(u) + K$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u) + K$
$\frac{u'}{a+u^2}$	$\frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{a}}\right) + +K$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u) + K$