

Colle du 08/09 - Sujet 1
Révisions d'algèbre linéaire

Question de cours

1. Définir une base et les coordonnées d'un vecteur dans une base.
2. Démontrer par caractérisation en dimension finie que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ est stable par g .

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $F = \{u \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, u''(x) = (1 + x^2)u(x)\}$. On pose $f : x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}}$ et $g : x \mapsto f(x) \int_0^x e^{-t^2} dt$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Montrer que f et g sont deux éléments de F .
3. Montrer que si u et v sont deux éléments de F , alors $u'v - uv'$ est constante.
4. Soit $h \in F$, montrer que $\frac{h}{f}$ et $\frac{g}{f}$ sont colinéaires.
5. En déduire une base de F .

Colle du 08/09 - Sujet 2
Révisions d'algèbre linéaire

Question de cours

1. Définir des supplémentaires et les caractériser en dimension finie.
2. Montrer que le noyau d'une application linéaire est un espace vectoriel.

Exercice 1. On pose $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$ et $w = (5, 7, 9)$.

1. Déterminer une base de $F = \text{Vect}(u, v, w)$.
2. Déterminer une équation cartésienne de F dans la base canonique.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère les espaces :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(X^2 + X).$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soit f la projection sur F parallèlement à G . Quelle est la matrice de f dans la base canonique ?
3. Soit g la symétrie par rapport à F parallèlement à G . Quelle est la matrice de g dans la base canonique ?

Colle du 08/09 - Sujet 3
Révisions d'algèbre linéaire

Question de cours

1. Énoncer le théorème du rang et donner la caractérisation des isomorphismes.
2. Démontrer par analyse-synthèse que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1. Déterminer le noyau et l'image de $f : a + bX + cX^2 \mapsto -2a + b + c + (a - 2b + c)X + (-5a + 4b + c)X^2$.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(u - 2\text{Id}_E) \circ (u - 3\text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que $E = \text{Ker}(u - 2\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u - 3\text{Id}_E)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{K}^2$ tel que $u^n = a_n u + b_n \text{Id}_E$.