

Colle du 15/09 - Sujet 1
Algèbre linéaire

Question de cours

1. Définir des supplémentaires et les caractériser en dimension finie.
2. Démontrer que si p est un projecteur d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, alors $\text{Tr}(p) = \text{rg}(p)$.

Exercice 1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(1), P(2), P(3), P(4)) \end{array}$.

1. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques.
2. Démontrer que f est isomorphisme.

Exercice 2. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$ et $A, B, F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E .

1. Montrer que $A \cup B = E \Rightarrow (A = E \text{ ou } B = E)$.
2. En déduire que $\bigcup_{i=1}^p F_i = E \Rightarrow \exists i \in \llbracket 1; p \rrbracket, F_i = E$.

Colle du 15/09 - Sujet 2
Algèbre linéaire

Question de cours

1. Énoncer le théorème du rang et donner la caractérisation des isomorphismes.
2. Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\text{Tr}(AB) = \dots$.

Exercice 1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y, y - z, x + y + z, x - y - z) \end{array}$. Déterminer la matrice, le noyau et l'image de f .

Exercice 2. On pose $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, 1)$ $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \text{Vect}(u_3)$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Déterminer A la matrice dans la base canonique de p la projection sur F parallèlement à G .
3. En déduire B la matrice dans la base canonique de s la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Colle du 15/09 - Sujet 3
Algèbre linéaire**Question de cours**

1. Donner la définition de F stable par f et de l'endomorphisme induit.
2. Démontrer que deux matrices semblables ont la même trace.

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ une base de E . Soit $(f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{L}(E)^4$ défini par

$$\begin{cases} f_1(e_1) = e_1 \\ f_1(e_2) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} f_2(e_1) = e_2 \\ f_2(e_2) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} f_3(e_1) = 0 \\ f_3(e_2) = e_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} f_4(e_1) = 0 \\ f_4(e_2) = e_2 \end{cases}.$$

Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 2. Soient $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et

$$F = \{ a(E_{11} - E_{22}) + b(E_{12} + E_{21}) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}$$
$$G = \{ a(E_{11} + E_{22}) + b(E_{12} - E_{21}) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Soit p la projection sur F parallèlement sur G . Déterminer la matrice de p dans la base canonique.