

Colle du 15/09 - Sujet 1
Algèbre et fonctions

Question de cours

1. Définition de F est stable par f , définition de l'endomorphisme induit, caractérisation matricielle.
2. Montrer que si p est un projecteur d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, alors $Tr(p) = rg(p)$.

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ telle que $A^2 \neq O_4$ et $A^3 = O_4$. On note f l'endomorphisme canoniquement associé.

1. Justifier qu'il existe $x \in \mathbb{C}^4$ tel que $x \notin \text{Ker}(f^2)$.
2. Montrer que $(f^2(x), f(x), x)$ forme une famille libre.
3. Justifier qu'il existe $a \in \mathbb{C}^4$ tel que $\mathcal{B} = (f^2(x), f(x), x, a)$ soit une base de $\mathbb{C}^4$.
4. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ les coordonnées de $f(a)$ dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer $B = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
5. Montrer que $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ et en déduire le rang de A .

Exercice 2.

1. Soient $a < b$ deux réels et f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ dérivable sur $]a; b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$.
2. Montrer également qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$.
3. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et $a \in I$. Soient f et g deux fonctions continues sur I , dérivables sur $I \setminus \{a\}$, telles que g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$ et que $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que pour tout $I \setminus \{a\}$, $g(x) \neq g(a)$.

(b) Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell$.

4. Déterminer par deux méthodes $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\tan(x) - x}{x^3}$.

Colle du 15/09 - Sujet 2
Algèbre et fonctions

Question de cours

1. Définition de la dérivée en un point, de la fonction dérivée.
2. Montrer que deux matrices semblables ont la même trace.

Exercice 1. Dans $\mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R})$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$E = \{f \in \mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R}) \mid \forall t \in [0; 1], f(t) = 0\}$$

$$F = \{f \in \mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R}) \mid \forall t \in [-1; 0], f(t) = 0\}$$

$$G = \{f \in \mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R}) \mid f \text{ est constante sur } [-1; 1]\}$$

Montrer que $\mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R}) = E \oplus F \oplus G$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que f' admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$ et examiner la réciproque.

Colle du 15/09 - Sujet 3
Algèbre et fonctions

Question de cours

1. Formule de Leibniz pour la dérivation n-ième d'un produit scalaire.
2. Montrer que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Exercice 1. Etudier la régularité de $f : x \mapsto x + x^3 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ (définition, prolongement par continuité, dérivabilité, $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$, ...)

Exercice 2. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.