

Colle du 29/09 - Sujet 1
Fonctions et intégrales généralisées**Question de cours**

1. Donner la définition d'une fonction intégrable en un point a .
2. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable ni en $+\infty$, ni en 0.

Exercice 1. Etudier la régularité de la fonction $f : x \mapsto \frac{x\sqrt{x}}{e^x - 1}$.

Exercice 2. Pour tout $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$ et $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}} dx$.

1. Justifier l'existence de I_n et J_n .
2. Montrer que $J_n = I_n - I_{n+1}$.
3. Montrer que $J_n = \frac{1}{3n} I_n$.
4. En déduire une expression de I_n en fonction de n .

Colle du 29/09 - Sujet 2
Fonctions et intégrales généralisées**Question de cours**

1. Donner la définition de la convergence de l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f$, f étant continue sur $[a; +\infty[$.
2. Montrer que la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable en 0 et n'est pas intégrable en $+\infty$.

Exercice 1. Soient $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{(x+2)(x-1)}{x \ln(x)} & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$, $g : x \mapsto \ln(x) - \frac{x^2+x-2}{x^2+2}$ et $h : x \mapsto x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, factoriser $h(x)$.
3. Dresser le tableau de variations complet de g .
4. Montrer qu'il existe un unique $t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ tel que $g(t) = 0$ et vérifier que $\sqrt{2} < t < 2$.
5. Dresser le tableau de variations complet de f .

Exercice 2. Montrer la convergence puis calculer $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$.

Colle du 29/09 - Sujet 3
Fonctions et intégrales généralisées

Question de cours

1. Enoncer le théorème d'intégration par parties sur un intervalle qui n'est pas un segment.
2. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable en $+\infty$.

Exercice 1. Nature de $I = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

Exercice 2. Soit $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f admet un unique point fixe sur $\left[1; \frac{3}{2}\right]$.
3. Montrer que f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $\left[1; \frac{3}{2}\right]$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existe et vérifie pour tout $n \geq 2$, $u_n \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$.
5. Déterminer la nature de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.