

Colle du 06/10 - Sujet 1
Intégrales généralisées et courbes paramétrées

Question de cours

1. Énoncer le théorème d'intégration par parties sur un intervalle qui n'est pas un segment.
2. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable en $+\infty$.

Exercice 1. Tracer l'arc paramétré par $\gamma(t) = (2 \cos(t) + \cos(2t), 2 \sin(t) + \sin(2t))$.

Exercice 2.

1. Montrer la convergence de $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$ pour $\alpha > 0$.
2. En déduire la convergence de $J = \int_1^{+\infty} \sin(x^2) dx$.

Colle du 06/10 - Sujet 2
Intégrales généralisées et courbes paramétrées

Question de cours

1. Donner la définition de la convergence de l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) dt$, f étant continue sur $[a; +\infty[$.
2. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est intégrable ni en $+\infty$, ni en 0.

Exercice 1. Déterminer la nature de $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx$.

Exercice 2. Étudier la courbe admettant pour paramétrage $\begin{cases} x(t) = 2 \cos(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$.

Colle du 06/10 - Sujet 3
Intégrales généralisées et courbes paramétrées

Question de cours

1. Énoncer le théorème du changement de variable pour une intégrale généralisée.
2. Montrer que la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable en 0.

Exercice 1. Représenter Γ la courbe paramétrée sur $[0; 2\pi]$ par $M : t \mapsto (2 \cos(t) + \cos(2t), 2 \sin(t) - \sin(2t))$.

Exercice 2.

1. Déterminer la nature de $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.
2. On admet que $\int_0^{+\infty} e^{t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire la valeur de I .