

Devoir Maison 1

Logique et fonctions réelles

A faire pour le lundi 21 septembre

Problème I - Logique et raisonnement

Soient f et g deux éléments de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On dit que f et g commutent si et seulement si $f \circ g = g \circ f$. On s'intéresse à déterminer le centre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ i.e. l'ensemble

$$\mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \circ g = g \circ f\}.$$

1. Traduire à l'aide de quantificateur le prédicat $P(f, g)$: « f et g commutent » puis le nier.
2. A l'aide du prédicat P , donner la traduction mathématique des assertions suivantes :
 - (a) A : « toutes les fonctions commutent entre elles »
 - (b) B : « toutes les fonctions commutent avec au moins une fonction »
 - (c) C : « il existe un couple de fonctions qui commutent »
 - (d) D : « il existe une fonction qui commute avec toutes les fonctions »
3. Nier chacune des assertions précédentes.
4. En expliquant brièvement en français, compléter $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ à l'aide de A , B , C et D .
5.
 - (a) Déterminer la valeur de vérité de D (*preuve à l'appui!*)
 - (b) Que peut-on en déduire sur $\mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$?
 - (c) En déduire la valeur de vérité de B et C .
6.
 - (a) Déterminer la valeur de vérité de A .
 - (b) Que peut-on en déduire sur $\mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$?

Pour $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère l'implication suivante :

$$f \in \mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \quad \Rightarrow \quad f = \text{Id}_{\mathbb{R}}.$$

7. Enoncer mathématiquement la réciproque, la négation et la contraposée de cette implication.
8. La réciproque est-elle vraie?
9. Démontrer la contraposée. *On pourra chercher g du côté des fonctions constantes.*
10. Quelle équivalence peut-on en déduire?
11. Compéter alors l'assertion suivante avec les quantificateurs $\forall$, $\exists$ et/ou ! :

$$\text{..... } f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \text{..... } g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f \circ g = g \circ f.$$

Problème II - Fonctions réelles

On considère la fonction

$$f : x \mapsto x \ln \left(\frac{x+2}{x-2} \right) + \frac{|x|}{4} + \frac{1}{2}.$$

Partie 1 : Généralité

1. Exprimer $f(14)$ en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et de nombres entiers.
2. Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de définition de f .
3. Montrer que la fonction f est paire. Préciser alors une réduction du domaine d'étude de f .

Partie 2 : Etude aux bornes

4. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$.
5. Montrer que pour tout $x \in]2; +\infty[$, $f(x) \geq \frac{x}{4}$.
6. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
7. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
8. Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction $h : u \mapsto \ln(1+u)$.
9. Calculer la dérivée de la fonction h en 0.
10. En déduire que $\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u \neq 0}} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$.
11. Vérifier que pour tout $x \in]2; +\infty[$, $f(x) = x \ln \left(1 + \frac{4}{x-2} \right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$.
12. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{4} \right) = \frac{9}{2}$.
13. En déduire le comportement asymptotique de f en $+\infty$.
14. En déduire sans calcul le comportement asymptotique de f en $-\infty$.

Partie 3 : Etude de la dérivée

15. Justifier que f est dérivable sur $]2; +\infty[$.
16. Montrer que pour tout $x \in]2; +\infty[$,

$$f'(x) = \ln \left(\frac{x+2}{x-2} \right) - \frac{4x}{x^2-4} + \frac{1}{4}.$$

17. Déterminer le comportement asymptotique de f' en $+\infty$.
18. Vérifier également que pour tout $x \in]2; +\infty[$,

$$f'(x) = \ln(x+2) - \ln(x-2) - \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}.$$

19. En posant $u = \frac{1}{x-2}$, calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left(-\ln(x-2) - \frac{2}{x-2} \right)$.

20. En déduire $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f'(x)$.
21. On note f'' la fonction dérivée de la fonction $f' : f'' = (f')'$. Calculer pour tout $x \in]2; +\infty[$, $f''(x)$.
22. On note $f^{(3)}$ la dérivée de la fonction f'' . Calculer pour tout $x \in]2; +\infty[$, $f^{(3)}(x)$.
23. Déterminer le tableau de variation complet de f' sur $]2; +\infty[$.
24. La fonction f' est-elle majorée ? minorée ? bornée sur $]2; +\infty[$?
25. Justifier qu'il existe un **unique** $\alpha \in]2; +\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.
26. On pose $\beta = f(\alpha)$.
 - (a) Montrer que $\ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha-2}\right) = \frac{4\alpha}{\alpha^2-4} - \frac{1}{4}$.
 - (b) En déduire que $\beta = \frac{4\alpha^2}{\alpha^2-4} + \frac{1}{2}$.

Partie 4 : Conclusion

27. Donner le tableau de variation complet de f sur $\mathcal{D}$.
28. Justifier que le graphe de f admet une tangente au point $x = 14$ et déterminer l'équation de cette tangente.