

Correction du Devoir Maison 1

Logique et fonctions réelles

Du lundi 21 septembre

Problème I - Logique et raisonnement

Soient f et g deux éléments de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On dit que f et g commutent si et seulement si $f \circ g = g \circ f$. On s'intéresse à déterminer le centre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ i.e. l'ensemble

$$\mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \circ g = g \circ f\}.$$

1. Soit $(f, g) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$. On a

$$P(f, g) : \quad \ll \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) \gg.$$

La négation est donc

$$\overline{P(f, g)} : \quad \ll \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq g(x) \gg.$$

2. Les assertions s'écrivent :

(a) $A : \ll \forall (f, g) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2, P(f, g) \gg$

(b) $B : \ll \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), P(f, g) \gg$

(c) $C : \ll \exists (f, g) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2, P(f, g) \gg$

(d) $D : \ll \exists f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), P(f, g) \gg$

3. Leurs négations sont alors données par

(a) $\overline{A} : \ll \exists (f, g) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2, \overline{P(f, g)} \gg$

(b) $\overline{B} : \ll \exists f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \overline{P(f, g)} \gg$

(c) $\overline{C} : \ll \forall (f, g) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2, \overline{P(f, g)} \gg$

(d) $\overline{D} : \ll \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \overline{P(f, g)} \gg$

4. On a les implications suivantes

$$A \Rightarrow D \Rightarrow B \Rightarrow C.$$

En effet, si A est vraie, toutes les fonctions commutent avec toutes les autres alors n'importe laquelle commute avec les autres, en en fixant une, on obtient l'assertion D .

Si D est vraie alors une fonction f_0 (fixée et indépendante de quoi que ce soit) commute avec toutes les fonctions, alors chaque fonction va commuter avec f_0 et donc C est vraie. *Attention, la réciproque est fausse a priori car si pour chaque f , on peut construire une fonction g_f adaptée à f qui commute avec f cela ne signifie pas qu'une seule et même fonction va commuter avec toutes les fonctions f .*

Si C est vraie alors chaque fonction va commuter avec une autre fonction. Donc en en fixant une, on peut en trouver une autre qui commute avec et donc globalement construire un couple qui commute.

5. (a) Pour démontrer une existence il nous faut ou utiliser un théorème le garantissant ou en préciser un exemple. Prenons ici un exemple et fixons $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$. Alors montrons que pour tout $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\text{Id}_{\mathbb{R}} \circ g = g \circ \text{Id}_{\mathbb{R}}$. Soit $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{Id}_{\mathbb{R}} \circ g(x) = \text{Id}_{\mathbb{R}}(g(x)) = g(x) = g(\text{Id}_{\mathbb{R}}(x)) = g \circ \text{Id}_{\mathbb{R}}(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\text{Id}_{\mathbb{R}} \circ g = g \circ \text{Id}_{\mathbb{R}}$. Or g est quelconque donc

$$\forall g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \text{Id}_{\mathbb{R}} \circ g = g \circ \text{Id}_{\mathbb{R}},$$

autrement dit,

$$\forall g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad P(\text{Id}_{\mathbb{R}}, g).$$

Ainsi,

$$\exists f = \text{Id}_{\mathbb{R}} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \forall g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad P(\text{Id}_{\mathbb{R}}, g).$$

Conclusion,

$$\boxed{D \text{ est vraie.}}$$

- (b) On a montré dans la question précédente qu'au moins une fonction permutait avec toutes les fonctions i.e. qu'il existe $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f \in \mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \neq \emptyset.}$$

Plus précisément, nous avons même établi

$$\text{Id}_{\mathbb{R}} \in \mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \quad \text{i.e.} \quad \{\text{Id}_{\mathbb{R}}\} \subset \mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})).$$

- (c) Puisque D est vraie et que, par la question précédente $D \Rightarrow B \Rightarrow C$, on en déduit que

$$\boxed{B \text{ et } C \text{ sont vraies.}}$$

6. (a) Montrons que A est fausse i.e. que $\overline{A}$ est vraie ou encore qu'il existe deux fonctions f et g qui ne commutent pas entre elles. Soient $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{matrix}$ la fonction constante égale à 0 et $g : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{matrix}$ la fonction constante égale à 1. Alors, pour $x = 0$ par exemple, on a

$$f(g(0)) = f(1) = 0.$$

Or

$$g(f(0)) = g(0) = 1.$$

Donc $f \circ g(0) \neq g \circ f(0)$ ceci étant vrai en au moins un point, on en déduit que $f \circ g \neq g \circ f$ ou encore que $\overline{P(f, g)}$ est vraie. Conclusion, $\overline{A}$ est vraie et donc

$$\boxed{A \text{ est fausse.}}$$

- (b) Puisque A est fausse, on en déduit que toutes les fonctions f ne sont pas dans $\mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ i.e.

$$\boxed{\mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \neq \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).}$$

Pour $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère l'implication suivante :

$$f \in \mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \quad \Rightarrow \quad f = \text{Id}_{\mathbb{R}}.$$

7. La réciproque est donnée par

$$f = \text{Id}_{\mathbb{R}} \Rightarrow f \in \mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})).$$

La négation est donnée par

$$f \in \mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \quad \text{ET} \quad f \neq \text{Id}_{\mathbb{R}}.$$

La contraposée est donnée par

$$f \neq \text{Id}_{\mathbb{R}} \Rightarrow f \notin \mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})).$$

8. Dans la question 5. on a vu que si $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$, alors $f \in \mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$. Conclusion,

la réciproque est vraie.

9. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Supposons que $f \neq \text{Id}_{\mathbb{R}}$. Alors, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x_0) \neq \text{Id}_{\mathbb{R}}(x_0) = x_0.$$

Posons $g_0 : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x_0 \end{matrix}$. Montrons que f et g_0 ne commutent pas. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. On a

$$f \circ g_0(y) = f(g_0(y)) = f(x_0).$$

D'autre part,

$$g_0 \circ f(y) = g_0(f(y)) = x_0.$$

Donc par définition de x_0 , on a

$$f \circ g_0(y) \neq g_0 \circ f(y).$$

Ceci étant vrai en au moins un point, on en déduit que $f \circ g_0 \neq g_0 \circ f$ i.e. f et g_0 ne commutent pas et donc f ne commutent pas avec toutes les fonctions :

$$f \notin \mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})).$$

Conclusion, la contraposée est vraie :

$$f \neq \text{Id}_{\mathbb{R}} \Rightarrow f \notin \mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})).$$

10. On sait que la contraposée est équivalente à l'implication initiale. Donc par la question précédente, on en déduit que l'implication est vraie :

$$f \in \mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \Rightarrow f = \text{Id}_{\mathbb{R}}.$$

Or par la question 8., nous avons déjà vu que la réciproque est aussi vraie. Conclusion,

$$f \in \mathcal{C}(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \Leftrightarrow f = \text{Id}_{\mathbb{R}}.$$

11. Conclusion, nous avons démontré l'assertion suivante :

$$\exists! f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \forall g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f \circ g = g \circ f.$$

Problème II - Fonctions réelles

On considère la fonction

$$f : x \mapsto x \ln \left(\frac{x+2}{x-2} \right) + \frac{|x|}{4} + \frac{1}{2}.$$

Partie 1 : Généralité

- Calculons $f(14)$.

Par définition,

$$\begin{aligned} f(14) &= 14 \ln \left(\frac{14+2}{14-2} \right) + \frac{|14|}{4} + \frac{1}{2} \\ &= 14 \ln \left(\frac{16}{12} \right) + \frac{14}{4} + \frac{1}{2} \\ &= 14 \ln \left(\frac{4}{3} \right) + \frac{16}{4} \\ &= 14 \ln(4) - 14 \ln(3) + 4 \\ &= 28 \ln(2) - 14 \ln(3) + 4. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(14) = 28 \ln(2) - 14 \ln(3) + 4.}$$

- Calculons $\mathcal{D}$ le domaine de définition de f . Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$x \in \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{x-2} > 0.$$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$x + 2$	$-$	$-$	0	$+$	
$x - 2$	$-$	0	$+$	$+$	
$\frac{x+2}{x-2}$	$+$	0	$-$	0	$+$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D} =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[.}$$

- Montrons que f est paire.

D'une part, par la question précédente, on remarque que $\mathcal{D}$ est centré en 0.

D'autre part, pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x \ln \left(\frac{-x+2}{-x-2} \right) + \frac{|-x|}{4} + \frac{1}{2} \\ &= -x \ln \left(\frac{x-2}{x+2} \right) + \frac{|x|}{4} + \frac{1}{2} \\ &= x \ln \left(\frac{x+2}{x-2} \right) + \frac{|x|}{4} + \frac{1}{2} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Conclusion,

la fonction f est paire.

On en déduit que la graphe de f est symétrique par rapport à l'axe (Oy) .

Il est donc possible d'étudier la fonction f sur $]2; +\infty[$.

Partie 2 : Etude aux bornes

4. Calculons $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$. On observe que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x+2}{x-2} = \left\langle \frac{4}{0^+} \right\rangle = +\infty.$$

Par composition,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \ln \left(\frac{x+2}{x-2} \right) = +\infty.$$

Donc par produit et somme,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x \ln \left(\frac{x+2}{x-2} \right) + \frac{|x|}{4} + \frac{1}{2} = +\infty.$$

Conclusion,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty.$$

5. Montrons que $\forall x \in]2; +\infty[, f(x) \geq \frac{x}{4}$. Soit $x \in]2; +\infty[$. Alors, $x+2 > x-2$ donc

$$\frac{x+2}{x-2} > 1 \quad \text{car } x-2 > 0.$$

Donc par la stricte croissance de la fonction logarithme,

$$\ln \left(\frac{x+2}{x-2} \right) > 0.$$

Puisque $x > 2 > 0$, $x \ln \left(\frac{x+2}{x-2} \right) > 0$. D'où,

$$f(x) = x \ln \left(\frac{x+2}{x-2} \right) + \frac{|x|}{4} + \frac{1}{2} \geq \frac{|x|}{4} + \frac{1}{2} \geq \frac{|x|}{4} = \frac{x}{4} \quad \text{car } x \geq 0.$$

Ceci étant vrai pour $x > 2$ quelconque, on en conclut que

$$\forall x \in]2; +\infty[, \quad f(x) \geq \frac{x}{4}.$$

6. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = +\infty.$$

Donc par la question précédente et le théorème de minoration, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

7. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Pour tout $x > 2$, on a

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \ln \left(\frac{x+2}{x-2} \right) + \frac{|x|}{4x} + \frac{1}{2x} \\ &= \ln \left(\frac{x(1+\frac{2}{x})}{x(1-\frac{2}{x})} \right) + \frac{x}{4x} + \frac{1}{2x} \quad \text{car } x > 0 \\ &= \ln \left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}} \right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2x}. \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 1$. Donc par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}} \right) = 0.$$

Donc par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}} \right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2x} \right) = 0 + \frac{1}{4} + 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{4}.$$

8. Soit $h : u \mapsto \ln(1+u)$. Déterminons le domaine de dérivabilité de h . On sait que la fonction logarithme est dérivable sur $]0; +\infty[$. Donc pour $u \in \mathbb{R}$, on a

$$h \text{ dérivable en } u \quad \Leftrightarrow \quad 1+u > 0 \quad \Leftrightarrow \quad u > -1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est dérivable sur }]-1; +\infty[.}$$

9. Calculons $h'(0)$. On commence par noter que $0 \in]-1; +\infty[$ donc h est dérivable en 0. De plus,

$$\forall u \in]-1; +\infty[, \quad h'(u) = \frac{(1+u)'}{1+u} = \frac{1}{1+u}.$$

En particulier,

$$\boxed{h'(0) = 1.}$$

10. Montrons que $\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u \neq 0}} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$.

Par la question précédente et la définition de la dérivée,

$$\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u \neq 0}} \frac{h(u) - h(0)}{u - 0} = h'(0) = 1.$$

On a pour tout $u \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[$,

$$\frac{h(u) - h(0)}{u - 0} = \frac{\ln(1+u) - \ln(1)}{u} = \frac{\ln(1+u)}{u}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u \neq 0}} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1.}$$

11. Montrons que pour tout $x \in]2; +\infty[$, $f(x) = x \ln \left(1 + \frac{4}{x-2}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$.

Soit $x > 2$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= x \ln \left(\frac{x+2}{x-2} \right) + \frac{|x|}{4} + \frac{1}{2} \\ &= x \ln \left(\frac{x-2+4}{x-2} \right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \\ &= x \ln \left(1 + \frac{4}{x-2} \right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]2; +\infty[, \quad f(x) = x \ln \left(1 + \frac{4}{x-2} \right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}.}$$

12. Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{4} \right) = \frac{5}{2}$.

Par la question précédente, pour tout $x \in]2; +\infty[$,

$$f(x) - \frac{x}{4} = x \ln \left(1 + \frac{4}{x-2} \right) + \frac{1}{2}.$$

Pour tout $x \in]2; +\infty[$, posons $u = \frac{4}{x-2}$. On a

$$\begin{aligned} u(x-2) &= 4 & \Leftrightarrow & \quad x-2 = \frac{4}{u} \quad \text{car } u \neq 0 \\ & & \Leftrightarrow & \quad x = \frac{4}{u} + 2 = \frac{4+2u}{u}. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$f(x) - \frac{x}{4} = \frac{4+2u}{u} \ln(1+u) + \frac{1}{2} = (4+2u) \frac{\ln(1+u)}{u} + \frac{1}{2}.$$

Or quand $x \rightarrow +\infty$, on a $u = \frac{4}{x-2} \rightarrow 0$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{4} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \left[(4+2u) \frac{\ln(1+u)}{u} + \frac{1}{2} \right].$$

Or par la question 10. $\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u \neq 0}} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$. Donc par produit et somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{4} \right) = 4 \times 1 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{4} \right) = \frac{9}{2}.}$$

13. Par la question précédente, on en déduit directement que

$$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ admet une asymptote oblique d'équation } y = \frac{x}{4} + \frac{9}{2} \text{ en } +\infty.}$$

14. Déterminons le comportement asymptotique de f en $-\infty$.

Par la question 3. la fonction f est paire. Donc par la question précédente, on en déduit que

$$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ admet une asymptote oblique d'équation } y = -\frac{x}{4} + \frac{9}{2} \text{ en } -\infty.}$$

Partie 3 : Etude de la dérivée

15. Justifions que f est dérivable sur $]2; +\infty[$.

Pour tout $x > 2$, on a $x - 2 \neq 0$. Donc $x \mapsto \frac{x+2}{x-2}$ est dérivable sur $]2; +\infty[$. De plus, par la question 2. pour tout $x > 2$, $\frac{x+2}{x-2} > 0$. La fonction $\ln$ étant dérivable sur $]0; +\infty[$, par composition, $x \mapsto \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$ est dérivable sur $]2; +\infty[$. La fonction $x \mapsto \frac{|x|}{4} + \frac{1}{2}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et donc sur $]2; +\infty[$. Par produit et somme, on en conclut que

la fonction f est dérivable sur $]2; +\infty[$.

16. Calculons f' . On a pour tout $x \in]2; +\infty[$,

$$f(x) = x \ln(x+2) - x \ln(x-2) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}.$$

La fonction f étant dérivable sur $]2; +\infty[$ par la question précédente, on calcule pour tout $x \in]2; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(x+2) + \frac{x}{x+2} - \ln(x-2) - \frac{x}{x-2} + \frac{1}{4} \\ &= \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) + \frac{x(x-2) - x(x+2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{1}{4} \\ &= \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) + \frac{x(x-2-x-2)}{x^2-4} + \frac{1}{4} \\ &= \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) - \frac{4x}{x^2-4} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x \in]2; +\infty[, \quad f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) - \frac{4x}{x^2-4} + \frac{1}{4}.$$

17. Déterminons le comportement asymptotique de f' en $+\infty$.

Pour tout $x > 2$, $\frac{x+2}{x-2} = \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = 0.$$

De plus, $\frac{4x}{x^2-4} = \frac{4}{x-\frac{4}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Donc par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0 - 0 + \frac{1}{4}.$$

Conclusion,

le graphe de f' présente une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{1}{4}$ en $+\infty$.

18. Montrons que $\forall x \in]2; +\infty[, f'(x) = \ln(x+2) - \ln(x-2) - \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$.

Pour tout $x \in]2; +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \ln(x+2) - \ln(x-2) - \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4} &= \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) - \frac{2(x+2) + 2(x-2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{1}{4} \\ &= \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) - \frac{2(x+2+x-2)}{x^2-4} + \frac{1}{4} \\ &= \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) - \frac{4x}{x^2-4} + \frac{1}{4} \\ &= f'(x). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x \in]2; +\infty[, \quad f'(x) = \ln(x+2) - \ln(x-2) - \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}.$$

19. Calculons $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left(-\ln(x-2) - \frac{2}{x-2} \right)$. Pour tout $x > 2$, posons $u = \frac{1}{x-2}$ i.e. $x-2 = \frac{1}{u}$ ou encore $x = \frac{1}{u} + 2 = \frac{1+2u}{u}$. Alors,

$$-\ln(x-2) - \frac{2}{x-2} = -\ln\left(\frac{1}{u}\right) - 2u = \ln(u) - 2u = u \left(\frac{\ln(u)}{u} - 2 \right).$$

De plus quand $x \rightarrow 2, x > 2$, on a $u = \frac{1}{x-2} \rightarrow \frac{1}{0^+} = +\infty$. Par croissance comparée,

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u)}{u} = 0.$$

Donc par produit,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left(-\ln(x-2) - \frac{2}{x-2} \right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} u \left(\frac{\ln(u)}{u} - 2 \right) = +\infty \times (-2) = -\infty.$$

Conclusion,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left(-\ln(x-2) - \frac{2}{x-2} \right) = -\infty.$$

20. Calculons $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f'(x)$. On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \ln(x+2) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4} = \ln(4) - \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \ln(4) - \frac{1}{4}$. Donc par la question précédente, on en déduit que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left[\ln(x+2) - \ln(x-2) - \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4} \right] = -\infty.$$

Conclusion,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f'(x) = -\infty.$$

21. Calculons f'' . Par la question 18. pour tout $x \in]2; +\infty[$, $f'(x) = \ln(x+2) - \ln(x-2) - \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$.
Donc la fonction f' est dérivable sur $]2; +\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont et de plus,

$$\begin{aligned} \forall x \in]2; +\infty[, \quad f''(x) &= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{(x+2)(x-2)^2 - (x+2)^2(x-2) + 2(x+2)^2 + 2(x-2)^2}{(x+2)^2(x-2)^2} \\ &= \frac{(x+2)(x-2)(x-2 - (x+2)) + 2(x^2 + 4x + 4 + x^2 - 4x + 4)}{(x+2)^2(x-2)^2} \\ &= \frac{(x^2 - 4)(-4) + 4x^2 + 16}{(x+2)^2(x-2)^2} \\ &= \frac{32}{(x+2)^2(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x \in]2; +\infty[, \quad f''(x) = \frac{32}{(x+2)^2(x-2)^2}.$$

22. Calculons $f^{(3)}$. Par la question précédente, on a

$$\forall x \in]2; +\infty[, \quad f''(x) = \frac{32}{(x^2 - 4)^2}.$$

La fonction f'' est dérivable sur $]2; +\infty[$ comme fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]2; +\infty[$. Donc f est trois fois dérivable sur $]2; +\infty[$ et pour tout $x \in]2; +\infty[$,

$$\forall x \in]2; +\infty[, \quad f^{(3)}(x) = -2 \frac{32 \times (2x)}{(x^2 - 4)^3} = -\frac{128x}{(x^2 - 4)^3}.$$

Conclusion,

$$\forall x \in]2; +\infty[, \quad f^{(3)}(x) = -\frac{128x}{(x^2 - 4)^3}.$$

23. Déterminons le tableau de variation complet de f' sur $]2; +\infty[$.

Par la question 21. $\forall x > 2$, $f''(x) = \frac{32}{(x+2)^2(x-2)^2} > 0$. Donc la fonction f' est strictement croissante sur $]2; +\infty[$. De plus par les questions 17. et 20. on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \frac{1}{4}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f'(x) = -\infty$. Conclusion,

x	2	$+\infty$
f'	$-\infty$	$\frac{1}{4}$

24. Par la question précédente, pour tout $x > 2$, $f'(x) < \frac{1}{4}$. Donc

$$\text{la fonction } f' \text{ est majorée sur }]2; +\infty[.$$

Cependant $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f'(x) = -\infty$ implique que

$$\text{la fonction } f' \text{ n'est ni minorée ni a fortiori bornée sur }]2; +\infty[.$$

25. Montrons qu'il existe un unique $\alpha \in]2; +\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

Par ce qui précède, on a $0 \in]-\infty; \frac{1}{4}[= \left[\lim_{x \rightarrow 2} f'(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \right[$. De plus la fonction f est continue et strictement croissante sur $]2; +\infty[$. Conclusion, par le théorème de la bijection ou le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,

$$\boxed{\exists! \alpha \in]2; +\infty[, \quad f'(\alpha) = 0.}$$

26. On pose $\beta = f(\alpha)$.

(a) Montrons que $\ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha-2}\right) = \frac{4\alpha}{\alpha^2-4} - \frac{1}{4}$.

Par construction de α , on a

$$\begin{aligned} f'(\alpha) = 0 & \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha-2}\right) - \frac{4\alpha}{\alpha^2-4} + \frac{1}{4} = 0 \\ & \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha-2}\right) = \frac{4\alpha}{\alpha^2-4} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha-2}\right) = \frac{4\alpha}{\alpha^2-4} - \frac{1}{4}.$$

(b) On a

$$\begin{aligned} \beta &= f(\alpha) \\ &= \alpha \ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha-2}\right) + \frac{|\alpha|}{4} + \frac{1}{2} \\ &= \alpha \left(\frac{4\alpha}{\alpha^2-4} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2} \quad \text{par la question précédente et } \alpha > 2 > 0. \\ &= \frac{4\alpha^2}{\alpha^2-4} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

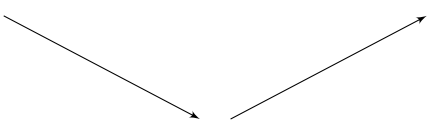
Conclusion,

$$\boxed{\beta = \frac{4\alpha^2}{\alpha^2-4} + \frac{1}{2}.$$

Partie 4 : Conclusion

27. Calculons le tableau de variation complet de f sur $\mathcal{D} =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.

Par la question 23. la fonction f' est strictement croissante sur $]2; +\infty[$ et par la question 25. $f'(\alpha) = 0$. On a donc

x	2	α	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
f			

De plus, par la question 4. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$, $f(\alpha) = \beta$ et par la question 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. D'où,

x	2	α	$+\infty$
f	$+\infty$	β	$+\infty$

Par parité de la fonction f , on en conclut que

x	$-\infty$	$-\alpha$	-2	2	α	$+\infty$
f	$+\infty$	β	$+\infty$	$+\infty$	β	$+\infty$

28. Déterminons l'existence et l'équation de la tangente au graphe de f en $x = 14$. On sait que f est dérivable sur $]2; +\infty[$ donc en 14. Donc

le graphe de f possède une tangente au point $x = 14$.

De plus l'équation de cette tangente est donnée par

$$y = f'(14)(x - 14) + f(14).$$

Par la question 16.

$$\begin{aligned} f'(14) &= \ln\left(\frac{14+2}{14-2}\right) - \frac{4 \times 14}{(14)^2 - 4} + \frac{1}{4} \\ &= \ln\left(\frac{16}{12}\right) - \frac{14}{7^2 - 1} + \frac{1}{4} \\ &= \ln(4) - \ln(3) - \frac{14}{48} + \frac{1}{4} \\ &= 2\ln(2) - \ln(3) - \frac{7}{24} + \frac{6}{24} \\ &= 2\ln(2) - \ln(3) - \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Par la question 1. $f(14) = 28\ln(2) - 14\ln(3) + 4$. D'où l'équation devient

$$\begin{aligned} y &= \left(2\ln(2) - \ln(3) - \frac{1}{24}\right)(x - 14) + 28\ln(2) - 14\ln(3) + 4 \\ &= \left(2\ln(2) - \ln(3) - \frac{1}{24}\right)x - 28\ln(2) + 14\ln(3) - \frac{7}{12} + 28\ln(2) - 14\ln(3) + 4 \\ &= \left(2\ln(2) - \ln(3) - \frac{1}{24}\right)x + \frac{-7 + 48}{12} \\ &= \left(2\ln(2) - \ln(3) - \frac{1}{24}\right)x + \frac{41}{12}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'équation de la tangente au graphe de f en $x = 14$ est

$$y = \left(2\ln(2) - \ln(3) - \frac{1}{24}\right)x + \frac{41}{12}.$$