

Devoir Maison 2

Bijections, trigonométrie, complexes

A faire pour le lundi 12 octobre

Problème I - Bijections

On considère la fonction suivante

$$f : x \mapsto \ln \left(\frac{x + \sqrt{4 + x^2}}{2} \right).$$

On note Γ_f le graphe de la fonction f .

Partie 1 : Etude de f et tracé de Γ_f

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{4 + x^2} > 0$.
2. En déduire $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f .
3. Etudier la parité de f .
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
5. (a) Démontrer sans dérivation que f est strictement croissante.
(b) Justifier que f définit une bijection dont on précisera l'espace d'arrivée. Que sait-on de f^{-1} ?
6. (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer la dérivée de f .
(b) Retrouver le résultat de la question 5a.
7. On pose pour tout $x > 0$, $g(x) = f(x) - \ln(x)$.
(a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
(b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
(c) Quelle est le comportement de Γ_f en $+\infty$? en $-\infty$?
8. Déterminer l'équation de T la tangente à Γ_f au point d'abscisse 0.
9. Déterminer la position relative de Γ_f et de T .
10. Tracer le graphe de f .
11. Par quelle transformation du plan peut-on obtenir $\Gamma_{f^{-1}}$ le graphe de la fonction réciproque de f à partir de Γ_f ? Représenter $\Gamma_{f^{-1}}$.

Partie 2 : Détermination de f^{-1}

12. On souhaite montrer, sans utiliser les résultats de la partie précédente, que f est injective.
(a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$f(x) = f(y) \quad \Leftrightarrow \quad (x - y) \left(\sqrt{4 + y^2} + \sqrt{4 + x^2} \right) = y^2 - x^2.$$

- (b) En déduire que f est injective.

13. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
14. Retrouver le résultat que f est bijective et en déduire une expression explicite de f^{-1} .
15. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.
16. Retrouver le résultat de la question précédente à l'aide du théorème de la dérivée de la fonction réciproque.

Problème II - Trigonométrie

Partie 1 : Une inéquation trigonométrique

On considère l'inéquation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$(I) \quad \sin(3x) + 1 - \cos(2x) - \sin(x) \geq 0.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(3x)$ et $\cos(2x)$ en fonction de $\sin(x)$.
2. En déduire les solutions de (I) dans $\mathbb{R}$ puis représenter sur le cercle les solutions appartenant à $] -\pi; \pi]$.

Partie 2 : Des équations trigonométriques

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E_n) \quad \cos((n+1)x) + \cos(nx) = \sin((n+1)x) + \sin(nx).$$

3. Si $n = 0$, résoudre (E_0) .

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

4. *Méthode 1, par factorisation.*

- (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser $\cos((n+1)x) + \cos(nx)$ et $\sin((n+1)x) + \sin(nx)$.
- (b) En déduire les solutions de (E_n) . Est-ce cohérent avec la question 3. ?

5. *Méthode 2, par forme polaire.*

- (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Mettre sous forme polaire $\cos(nx) - \sin(nx)$.
- (b) En déduire à nouveau les solutions de (E_n) .

Considérons maintenant l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$(F_n) \quad \cos((n-1)x) + \cos(nx) = \sin((n+1)x) + \sin(nx).$$

6. Résoudre (F_0) .
7. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\cos((n-1)x)$ et $\sin((n+1)x)$ en fonction de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$.
8. En déduire les solutions de (F_n) .

Problème III - Complexes

On considère l'application complexe suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{2i\} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{2z-i}{z-2i} \end{array}$$

1. Calculer $f(-2)$.
2. (a) Calculer $f\left(\frac{-3+i}{2}\right)$.
(b) Préciser sa forme polaire.
(c) En déduire $\left(f\left(\frac{-3+i}{2}\right)\right)^{2026}$.
3. Déterminer $f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$.

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, on pose $g(z) = \text{Im}(f(z))$.

4. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, $g(z) = \frac{3\text{Re}(z)}{|z-2i|^2}$.
5. En déduire $f^{\leftarrow}(\mathbb{R})$.
6. Déterminer $A = \{\theta \in \mathbb{R} \mid 2e^{i\theta} \neq 2i\}$.
7. Soit $\theta \in A$ et $z = 2e^{i\theta}$.
(a) Montrer que $|z-2i|^2 = 16\sin^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.
(b) En déduire $g(z)$ en fonction de θ .
8. En déduire $g(-2)$, est-ce cohérent avec la question 1. ?
9. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Résoudre, suivant les valeurs de ω , les solutions de l'équation $\omega = f(z)$, d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$.
10. Justifier que f définit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$ dans un ensemble que l'on déterminera et préciser f^{-1} .
11. Calculer $f^{-1}(1-i)$. Est-ce cohérent avec la question 2.a ?