

Correction du Devoir Maison 2

Bijections, trigonométrie, complexes

Du lundi 12 octobre

Problème I - Bijections

On considère la fonction suivante

$$f : x \mapsto \ln \left(\frac{x + \sqrt{4 + x^2}}{2} \right).$$

On note Γ_f le graphe de la fonction f .

Partie 1 : Etude de f et tracé de Γ_f

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes :

$$x + \sqrt{4 + x^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{4 + x^2} > -x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ \text{ou} \\ x \leq 0 \text{ et } 4 + x^2 > x^2 \end{cases}.$$

La dernière assertion étant toujours vraie, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{4 + x^2} > 0$.

2. Il s'ensuit immédiatement que f est définie sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

3. L'ensemble $\mathcal{D}_f$ est bien sûr centré en 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln \left(\frac{-x + \sqrt{4 + (-x)^2}}{2} \right) = -\ln \left(\frac{2}{-x + \sqrt{4 + x^2}} \right) \\ &= -\ln \left(\frac{2}{-x + \sqrt{4 + x^2}} \times \frac{x + \sqrt{4 + x^2}}{x + \sqrt{4 + x^2}} \right) \\ &= -\ln \left(\frac{2(x + \sqrt{4 + x^2})}{x^2 + 4 + x^2} \right) \\ &= -\ln \left(\frac{x + \sqrt{4 + x^2}}{2} \right) = -f(x). \end{aligned}$$

On en déduit donc que la fonction f est impaire.

4. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{4 + x^2}}{2} = +\infty$, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x + \sqrt{4 + x^2}}{2} \right) = +\infty.$$

5. (a) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq x < y$. Alors $0 \leq x^2 < y^2$ et $\sqrt{4 + x^2} < \sqrt{4 + y^2}$. Donc $x + \sqrt{4 + x^2} < y + \sqrt{4 + y^2}$ et donc $f(x) < f(y)$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme f est impaire (d'après la question 3), on conclut que

la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- (b) La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de la bijection, f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$. On a déjà vu dans la question 4 que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Or f est impaire (d'après la question 3). Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Ainsi f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. De plus sa réciproque, définie sur $\mathbb{R}$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.

6. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $4 + x^2 \geq 4 > 0$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{4 + x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus d'après la question 1 $x + \sqrt{4 + x^2} > 0$. Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x + \sqrt{4 + x^2}}{2} \right)' \times \frac{2}{x + \sqrt{4 + x^2}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{2x}{4\sqrt{4 + x^2}} \right) \times \frac{2}{x + \sqrt{4 + x^2}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{4 + x^2} + x}{2\sqrt{4 + x^2}} \right) \times \frac{2}{x + \sqrt{4 + x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}}. \end{aligned}$$

Conclusion : on a montré que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}}.$$

- (b) D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$. Donc

la fonction est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

7. On pose pour tout $x > 0$, $g(x) = f(x) - \ln(x)$.

- (a) Soit $x > 0$. On a

$$g(x) = \ln \left(\frac{x + \sqrt{4 + x^2}}{2} \right) - \ln(x) = \ln \left(\frac{x + \sqrt{4 + x^2}}{2x} \right) = \ln \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} \right) - \ln(2).$$

Or $\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ln(2) - \ln(2) = 0.$$

- (b) En utilisant la question précédente, on écrit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} + \frac{g(x)}{x}.$$

Le premier terme tend vers 0 par croissance comparée et le second également d'après la limite précédente. D'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

- (c) Nous avons vu à la question 4 que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ce qui couplé à la question précédente nous permet de conclure que

le graphe Γ_f possède une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.

La fonction étant impaire (question 3) on en déduit que

le graphe Γ_f possède aussi une branche parabolique de direction (Ox) en $-\infty$.

8. En utilisant la question 6a, on a $f(0) = \ln\left(\frac{2}{2}\right) = 0$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$. Donc

$$\boxed{\text{l'équation de la tangente } T \text{ est } y = \frac{x}{2}.$$

9. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - \frac{x}{2}$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et d'après la question 6a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{2}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$h'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{4+x^2} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4+x^2 < 4.$$

La dernière assertion n'étant jamais vraie, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) \leq 0$ et donc la fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}$. Or $h(0) = f(0) - 0 = 0$. Donc pour tout $x \geq 0$, $h(x) \leq 0$ et donc $f(x) \leq \frac{x}{2}$. A contrario pour tout $x \leq 0$, $h(x) \geq 0$ et $f(x) \geq \frac{x}{2}$. Par conséquent,

$$\boxed{\Gamma_f \text{ est au-dessus la tangente } T \text{ sur }]-\infty; 0] \text{ et en dessous de la tangente } T \text{ sur } [0; +\infty[.}$$

10.

11. C'est un résultat de cours

$$\boxed{\text{le graphe de } \Gamma_{f^{-1}} \text{ s'obtient de celui de } \Gamma_f \text{ par la symétrie axiale d'axe } y = x.}$$

Partie 2 : Détermination de f^{-1}

12. On souhaite montrer, sans utiliser les résultats de la partie précédente, que f est injective.

(a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) & \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x + \sqrt{4+x^2}}{2}\right) = \ln\left(\frac{y + \sqrt{4+y^2}}{2}\right) \\ & \Leftrightarrow x + \sqrt{4+x^2} = y + \sqrt{4+y^2} \\ & \Leftrightarrow x - y = \sqrt{4+y^2} - \sqrt{4+x^2}. \end{aligned}$$

En multipliant par « l'expression conjuguée », on obtient que

$$\boxed{f(x) = f(y) \quad \Leftrightarrow \quad (x - y) \left(\sqrt{4+y^2} + \sqrt{4+x^2} \right) = 4 + y^2 - (4 + x^2) = y^2 - x^2.}$$

(b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = f(y)$ alors par la question précédente

$$(x - y) \left(\sqrt{4+y^2} + \sqrt{4+x^2} \right) = 4 + y^2 - (4 + x^2) = y^2 - x^2 = -(x - y)(y + x).$$

Supposons $x \neq y$ alors

$$\sqrt{4+y^2} + \sqrt{4+x^2} = -x - y \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4+y^2} + y + \sqrt{4+x^2} + x = 0.$$

Or d'après la question 1, on a $\sqrt{4+y^2} + y > 0$ et $\sqrt{4+x^2} + x > 0$, par conséquent $\sqrt{4+y^2} + y + \sqrt{4+x^2} + x > 0$ ce qui contredit l'assertion précédente. Donc l'hypothèse $x \neq y$ est fautive et de fait $x = y$. On a donc montré que si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$:

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est injective sur } \mathbb{R}.}$$

13. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 f(x) = y & \Leftrightarrow \ln \left(\frac{x + \sqrt{4 + x^2}}{2} \right) = y \\
 & \Leftrightarrow x + \sqrt{4 + x^2} = 2e^y \\
 & \Leftrightarrow \sqrt{4 + x^2} = 2e^y - x \\
 & \Leftrightarrow 4 + x^2 = (2e^y - x)^2 \quad \text{et} \quad 2e^y - x > 0 \\
 & \Leftrightarrow 4 + x^2 = 4e^{2y} - 4e^y x + x^2 \quad \text{et} \quad 2e^y - x > 0 \\
 & \Leftrightarrow 4e^y x = 4e^{2y} - 4 \quad \text{et} \quad 2e^y - x > 0 \\
 & \Leftrightarrow x = e^y - e^{-y} \quad \text{et} \quad 2e^y - (e^y - e^{-y}) > 0 \\
 & \Leftrightarrow x = e^y - e^{-y}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution $x = e^y - e^{-y}$.

14. D'après la question précédente, f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de plus pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(y) = e^y - e^{-y}.$$

15. La fonction exponentielle étant dérivable sur $\mathbb{R}$, par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a directement

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad (f^{-1})'(y) = e^y + e^{-y}.$$

16. Dans les questions précédentes, nous avons obtenu que

- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} \neq 0$.

Donc par le théorème de la dérivée de la fonction réciproque, la fonction f^{-1} est dérivable sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
 \forall y \in \mathbb{R}, \quad (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\
 &= \sqrt{4 + f^{-1}(y)^2} \quad \text{par la question 6a} \\
 &= \sqrt{4 + (e^y - e^{-y})^2} \quad \text{par la question 15} \\
 &= \sqrt{4 + e^{2y} - 2e^y e^{-y} + e^{-2y}} \\
 &= \sqrt{4 + e^{2y} - 2 + e^{-2y}} \\
 &= \sqrt{e^{2y} + 2 + e^{-2y}} \\
 &= \sqrt{e^{2y} + 2e^y e^{-y} + e^{-2y}} \\
 &= \sqrt{(e^y + e^{-y})^2} \\
 &= e^y + e^{-y} \quad \text{CAR } e^y + e^{-y} > 0.
 \end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question précédente,

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad (f^{-1})'(y) = e^y + e^{-y}.$$

Problème II - Trigonométrie

Partie 1 : Une inéquation trigonométrique

On considère l'inéquation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$(I) \quad \sin(3x) + 1 - \cos(2x) - \sin(x) \geq 0.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin(2x) \cos(x) + \sin(x) \cos(2x) \\ &= 2 \sin(x) \cos(x) \cos(x) + \sin(x) \cos^2(x) - \sin(x) \sin^2(x) \\ &= 3 \sin(x) \cos^2(x) - \sin^3(x) \\ &= 3 \sin(x) (1 - \sin^2(x)) - \sin^3(x) \\ &= 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x). \end{aligned}$$

Vérification : si $x = \frac{\pi}{2}$, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ et $3 \sin(x) - 4 \sin^3(x) = 3 - 4 = -1$. Ok.

De même, directement,

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x).$$

Conclusion,

$\sin(3x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x) \quad \text{et} \quad \cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x).$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la question précédente,

$$\begin{aligned} (I) \quad &\Leftrightarrow \sin(3x) + 1 - \cos(2x) - \sin(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x) + 1 - 1 + 2 \sin^2(x) - \sin(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -4 \sin^3(x) + 2 \sin^2(x) + 2 \sin(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \sin(x) (-2 \sin^2(x) + \sin(x) + 1) \geq 0. \end{aligned}$$

Posons $X = \sin(x)$. Dès lors,

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad X (-2X^2 + X + 1) \geq 0.$$

Soit Δ le discriminant de $-X^2 + X + 1$. On a $\Delta = 1 + 4 = 5$. Donc les racines associées sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} = -1$. Ainsi, $-2X^2 + X + 1 = -2 \left(X + \frac{1}{2}\right) (X - 1)$. D'où

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad -2X \left(X + \frac{1}{2}\right) (X - 1) \geq 0.$$

Or on a le tableau de signe suivant :

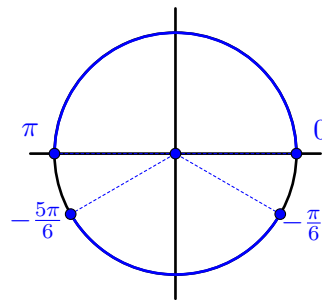
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$
$-2X$	+	+	0	-	-
$X + \frac{1}{2}$	-	0	+	+	+
$X - 1$	-	-	-	0	+
$-2X \left(X + \frac{1}{2}\right) (X - 1)$	+	0	-	0	-

On obtient alors

$$\begin{aligned}
 (I) & \Leftrightarrow X \leq -\frac{1}{2} \text{ OU } 0 \leq X \leq 1 \\
 & \Leftrightarrow \sin(x) \leq -\frac{1}{2} \text{ OU } 0 \leq \sin(x) \leq 1 \\
 & \Leftrightarrow \sin(x) \leq -\frac{1}{2} \text{ OU } 0 \leq \sin(x) \\
 & \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ OU } 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi.
 \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (I) est

$$\mathcal{S}_I = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right] \cup [2k\pi; (2k+1)\pi] \right).$$



Partie 2 : Une équation trigonométrique

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E_n) \quad \cos((n+1)x) + \cos(nx) = \sin((n+1)x) + \sin(nx).$$

3. Si $n = 0$, on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(E_0) \quad \Leftrightarrow \cos(x) + 1 = \sin(x) + 0 \quad \Leftrightarrow \cos(x) - \sin(x) = -1.$$

Passons à la forme polaire :

$$\begin{aligned}
 (E_0) & \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
 & \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
 & \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
 & \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ OU } x + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\
 & \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ OU } x = -\pi + 2k\pi.
 \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E_0) est donné par

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi; -\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

4. Méthode 1, par factorisation.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par une formule de factorisation, on a

$$\begin{aligned}\cos((n+1)x) + \cos(nx) &= 2 \cos\left(\frac{(n+1)x + nx}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)x - nx}{2}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\sin((n+1)x) + \sin(nx) &= 2 \sin\left(\frac{(n+1)x + nx}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)x - nx}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\begin{cases} \cos((n+1)x) + \cos(nx) = 2 \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ \sin((n+1)x) + \sin(nx) = 2 \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right). \end{cases}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(E_n) &\Leftrightarrow \cos((n+1)x) + \cos(nx) = \sin((n+1)x) + \sin(nx) \\ &\Leftrightarrow 2 \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) = \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) \quad \text{OU} \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) - \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) = 0 \quad \text{OU} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) = 0 \quad \text{OU} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, x = \pi + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \text{OU} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, x = \pi + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{(2n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{OU} \quad x = \pi + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{(2n+1)x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{OU} \quad x = \pi + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2(2n+1)} + \frac{2k\pi}{2n+1} \quad \text{OU} \quad x = \pi + 2k\pi \quad \text{car } 2n+1 \neq 0.\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E_n) est

$$\mathcal{S}_n = \left\{ \frac{\pi}{2(2n+1)} + \frac{2k\pi}{2n+1} ; \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Si $n = 0$, on obtient

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ce qui est bien cohérent avec la question 3. (ce que l'on est fort !)

5. Méthode 2, par forme polaire.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme précédemment, on a

$$\begin{aligned}\cos(nx) - \sin(nx) &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(nx) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(nx) \right) \\ &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(nx) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(nx) \\ &= \sqrt{2} \cos\left(nx + \frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\cos(nx) - \sin(nx) = \sqrt{2} \cos\left(nx + \frac{\pi}{4}\right).$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. De la même façon, on a aussi,

$$\cos((n+1)x) - \sin((n+1)x) = \sqrt{2} \cos\left((n+1)x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}(E_n) \quad &\Leftrightarrow \cos((n+1)x) + \cos(nx) = \sin((n+1)x) + \sin(nx) \\ &\Leftrightarrow \cos((n+1)x) - \sin((n+1)x) = -(\cos(nx) - \sin(nx)) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left((n+1)x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(nx + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(nx + \frac{\pi}{4} - \pi\right) \\ &\Leftrightarrow \cos\left((n+1)x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(nx - \frac{3\pi}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad (n+1)x + \frac{\pi}{4} = nx - \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ &\quad \text{OU } (n+1)x + \frac{\pi}{4} = -nx + \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = -\pi + 2k\pi \quad \text{OU } (2n+1)x = \pi + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \pi + 2k'\pi \quad \text{OU } x = \frac{\pi}{2n+1} + \frac{2k\pi}{2n+1}.\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve exactement les mêmes solutions (c'est bien fichu les maths),

$$\mathcal{S}_n = \left\{ \frac{\pi}{2(2n+1)} + \frac{2k\pi}{2n+1} ; \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Considérons maintenant l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$(F_n) \quad \cos((n-1)x) + \cos(nx) = \sin((n+1)x) + \sin(nx).$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par parité du cosinus, on a

$$(F_0) \quad \Leftrightarrow \cos(-x) + 1 = \sin(x) + 0 \quad \Leftrightarrow \cos(x) + 1 = \sin(x) \quad \Leftrightarrow (E_0).$$

Conclusion, on a les mêmes solutions qu'à la question 3.

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. En développant, on a directement,

$$\begin{cases} \cos((n-1)x) &= \cos(nx) \cos(-x) - \sin(nx) \sin(-x) = \cos(nx) \cos(x) + \sin(nx) \sin(x) \\ \sin((n+1)x) &= \sin(nx) \cos(x) + \sin(x) \cos(nx). \end{cases}$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors,

$$\begin{aligned}
 (F_n) &\Leftrightarrow \cos((n-1)x) + \cos(nx) = \sin((n+1)x) + \sin(nx) \\
 &\Leftrightarrow \cos(nx)\cos(x) + \sin(nx)\sin(x) + \cos(nx) \\
 &\quad = \sin(nx)\cos(x) + \sin(x)\cos(nx) + \sin(nx) \\
 &\Leftrightarrow \cos(nx)(\cos(x) + 1 - \sin(x)) = \sin(nx)(-\sin(x) + \cos(x) + 1) \\
 &\Leftrightarrow \cos(nx) = \sin(nx) \quad \text{OU} \quad \cos(x) + 1 - \sin(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \cos(nx) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - nx\right) \quad \text{OU} \quad (E_0) \\
 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad nx = \frac{\pi}{2} - nx + 2k\pi \quad \text{OU} \quad nx = -\frac{\pi}{2} + nx + 2k\pi \\
 &\quad \text{OU} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{OU} \quad x = \pi + 2k\pi \quad \text{par la question 3.} \\
 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2nx = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{OU} \quad 0 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (\text{impossible}) \\
 &\quad \text{OU} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{OU} \quad x = \pi + 2k\pi \\
 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{n} \quad \text{OU} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{OU} \quad x = \pi + 2k\pi \quad \text{car } n \neq 0.
 \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des solutions est donné par

$$\mathcal{S}_{F_n} = \left\{ \frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{n} ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Problème III - Complexes

On considère l'application complexe suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{2i\} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{2z-i}{z-2i} \end{array}$$

1. On a les calculs suivants :

$$f(-2) = \frac{2(-2) - i}{(-2) - 2i} = \frac{-4 - i}{-2 - 2i} = \frac{4 + i}{2(1 + i)} = \frac{(4 + i)(1 - i)}{2(1 + 1)} = \frac{4 - 4i + i + 1}{4} = \frac{5 - 3i}{4}.$$

Conclusion,

$$f(-2) = \frac{5 - 3i}{4}.$$

2. (a) C'est reparti. On a les égalités entre complexes suivantes :

$$f\left(\frac{-3+i}{2}\right) = \frac{-3+i-i}{\frac{-3+i}{2}-2i} = \frac{-3}{\frac{-3-3i}{2}} = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{2} = 1-i.$$

Conclusion,

$$f\left(\frac{-3+i}{2}\right) = 1-i.$$

(b) On a les égalités suivantes :

$$f\left(\frac{-3+i}{2}\right) = 1-i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Or $\sqrt{2} > 0$, conclusion, la forme polaire de $f\left(\frac{-3+i}{2}\right)$ est

$$f\left(\frac{-3+i}{2}\right) = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

(c) Par la question précédente,

$$\begin{aligned} \left(f\left(\frac{-3+i}{2}\right)\right)^{2026} &= \sqrt{2}^{2026} e^{-i\frac{\pi}{4} \times 2026} \\ &= 2^{1013} e^{-i\frac{\pi}{4} (253 \times 8 + 2)} \\ &= 2^{1013} e^{-2i\pi \times 253 - i\frac{2\pi}{4}} \\ &= 2^{1013} e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ &= -i2^{1013}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\left(f\left(\frac{-3+i}{2}\right)\right)^{2026} = -i2^{1013}.$$

3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) &\Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{U} \\ &\Leftrightarrow |f(z)|^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow f(z)\overline{f(z)} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{2z - i}{z - 2i} \frac{\overline{2z - i}}{\overline{z - 2i}} = 1 \\ &\Leftrightarrow (2z - i)(\overline{2z - i}) = (z - 2i)(\overline{z - 2i}) \quad \text{car } z \neq 2i \text{ et donc } \overline{z - 2i} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 4z\overline{z} + 2iz - 2i\overline{z} + 1 = z\overline{z} + 2iz - 2i\overline{z} + 4 \\ &\Leftrightarrow 3z\overline{z} = 3 \\ &\Leftrightarrow 3|z|^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{U}. \end{aligned}$$

On remarque que $2i \notin \mathbb{U}$. Donc il n'est pas nécessaire d'enlever cette valeur de l'ensemble solution.

Conclusion,

$$\boxed{f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) = \mathbb{U}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, on pose $g(z) = \text{Im}(f(z))$.

4. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f(z)) &= \frac{f(z) - \overline{f(z)}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(\frac{2z - i}{z - 2i} - \frac{2\overline{z} + i}{\overline{z} + 2i} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \frac{(2z - i)(\overline{z} + 2i) - (2\overline{z} + i)(z - 2i)}{(z - 2i)(\overline{z} + 2i)} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{2|z|^2 + 4iz - i\overline{z} + 2 - 2|z|^2 + 4i\overline{z} - iz - 2}{|z - 2i|^2} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{3iz + 3i\overline{z}}{|z - 2i|^2} \\ &= \frac{3}{|z - 2i|^2} \frac{z + \overline{z}}{2} \\ &= \frac{3\text{Re}(z)}{|z - 2i|^2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}, \quad g(z) = \frac{3\text{Re}(z)}{|z - 2i|^2}.$$

5. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad f(z) \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad g(z) = \operatorname{Im}(f(z)) = 0.$$

Donc par la question précédente, on a

$$z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3\operatorname{Re}(z)}{|z-2i|^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re}(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in i\mathbb{R}.$$

Attention, cette fois-ci, on n'oublie pas d'enlever la valeur $2i$:

$$f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) = i\mathbb{R} \setminus \{2i\}.$$

6. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\theta \in A \quad \Leftrightarrow \quad 2e^{i\theta} \neq 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad e^{i\theta} \neq e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Par la pseudo-unicité de la forme polaire, on a

$$\theta \in A \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Conclusion,

$$A = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

7. Soit $\theta \in A$ et $z = 2e^{i\theta}$.

(a) On a les égalités suivantes :

$$|z - 2i|^2 = \left| 2e^{i\theta} - 2e^{i\frac{\pi}{2}} \right|^2 = 4 \left| e^{i\theta} - e^{i\frac{\pi}{2}} \right|^2.$$

Par factorisation par l'angle moitié,

$$\begin{aligned} |z - 2i|^2 &= 4 \left| e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} \left(e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})} - e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})} \right) \right|^2 \\ &= 4 \left| e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} \right|^2 \left| 2i \sin \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right|^2 \\ &= 16 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$|z - 2i|^2 = 16 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

(b) Par ce qui précède,

$$g(z) = \frac{3\operatorname{Re}(z)}{|z - 2i|^2} = \frac{3\operatorname{Re}(2e^{i\theta})}{16 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{6 \cos(\theta)}{16 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}.$$

Conclusion,

$$g(z) = \frac{3 \cos(\theta)}{8 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}.$$

8. On observe que $-2 = 2e^{i\pi}$. Donc en posant $\theta = \pi \in A$ dans la question précédente, on trouve que

$$g(-2) = \frac{3 \cos(\pi)}{8 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-3}{8 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-3}{8 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{3}{4}.$$

Or par la question 1. on a $f(-2) = \frac{5-3i}{4}$ et par conséquent, on retrouve bien que

$$g(-2) = \operatorname{Im}(f(-2)) = -\frac{3}{4}.$$

Conclusion,

$$g(-2) = -\frac{3}{4}.$$

9. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(z) = \omega & \Leftrightarrow \frac{2z-i}{z-2i} = \omega & \Leftrightarrow & 2z-i = \omega(z-2i) & \text{car } z \neq 2i \\ & & \Leftrightarrow & 2z-i = \omega z - 2i\omega \\ & & \Leftrightarrow & 2i\omega - i = z(\omega - 2). \end{aligned}$$

Premier cas, si $\omega = 2$, on a

$$4i - i = 3i = 0$$

ce qui est impossible. Dans ce cas l'ensemble solution est vide :

$$\mathcal{S}_1 = \emptyset.$$

Second cas, $\omega \neq 2$. Alors,

$$f(z) = \omega \Leftrightarrow z = i \frac{2\omega - 1}{\omega - 2}.$$

Dans ce cas, on obtient une unique possibilité. Vérifions que cette valeur est bien différente de $2i$:

$$\begin{aligned} 2i = i \frac{2\omega - 1}{\omega - 2} & \Leftrightarrow 2\omega - 4 = 2\omega - 1 & \text{car } \omega \neq 2 \\ & \Leftrightarrow -4 = -1 & \text{impossible.} \end{aligned}$$

Donc $i \frac{2\omega - 1}{\omega - 2} \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$. Conclusion dans ce cas, l'ensemble des complexes solutions est

$$f(z) = \omega \Leftrightarrow z = i \frac{2\omega - 1}{\omega - 2}.$$

10. Par la question précédente, on obtient que tout complexe $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$ admet un et un seul antécédent z dans $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$ par f . Conclusion,

$$\text{La fonction } f \text{ définit une bijection de } \mathbb{C} \setminus \{2i\} \text{ dans } \mathbb{C} \setminus \{2\}.$$

De plus, toujours par la question précédente, on a

$$\forall \omega \in \mathbb{C} \setminus \{2\}, \quad f^{-1}(\omega) = i \frac{2\omega - 1}{\omega - 2}.$$

11. Posons $\omega = 1 + i$. On observe que $1 + i \neq 2$, donc

$$f^{-1}(1-i) = i \frac{2-2i-1}{1-i-2} = i \frac{1-2i}{-1-i} = i \frac{(1-2i)(-1+i)}{2} = i \frac{-1+i+2i+2}{2} = i \frac{1+3i}{2} = \frac{-3+i}{2}.$$

Conclusion,

$$f^{-1}(1+i) = \frac{-3+i}{2}.$$

Ce qui est bien cohérent avec la question 2.a car en composant par f , on retrouve que

$$f \circ f^{-1}(1-i) = f\left(\frac{-3+i}{2}\right) \Leftrightarrow 1-i = f\left(\frac{-3+i}{2}\right)$$