Devoir Maison 3
calcul algébrique, fonctions usuelles, équations complexes

A faire pour le lundi 16 novembre

Problème I - Calcul algébrique

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in [\![0; n]\!]$, on s'intéresse à calculer

$$S(p,n) = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}.$$

Partie 1 : Des résultats annexes

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

1. Préciser la valeur de $S(0,n)$ et $S(1,n)$ et $S(2,n)$ pour $n \geqslant 2$.
2. Calculer la valeur de $\sum_{p=0}^{n} S(p,n)$.

Partie 2 : Méthode 1 et conséquences.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

3. Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant p$, $S(p,n) = \binom{n+1}{p+1}$.
4. Retrouver alors le résultat de la question 2.
5. Calculer pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $n \geqslant p$, $\sum_{k=p}^{n} \binom{n-k+p}{p}$.
6. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $n \geqslant p$.
   (a) Soit $k \in [\![p; n]\!]$. Exprimer $(k+1)\binom{k}{p}$ en fonction de $\binom{k+1}{p+1}$.
   (b) En déduire $\sum_{k=p}^{n} (k+1)\binom{k}{p}$.

Partie 3 : Méthode 2 par un factoriel décroissant

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$A_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (x-k).$$

On pose également par convention $A_0(x) = 1$. On fixe dans toute cette partie $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

7. Calculer $A_5\left(\frac{3}{2}\right)$.
8. Préciser $A_n(-1)$ en fonction de $n!$

9. (a) Préciser pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $A_n(k)$.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_n(k) = n!\binom{k}{n}$
10. (a) Montrer que $A_{n+1}(x) = (x-n)\,A_n(x)$.
    (b) A l'aide d'un changement d'indice, montrer que $A_{n+1}(x) = xA_n(x-1)$.
11. Déduire de la question précédente que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A_{p+1}(x+1) - A_{p+1}(x) = (p+1)\,A_p(x)$.
12. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} A_p(k) = \frac{A_{p+1}(n+1)}{p+1}$.
13. Retrouver alors les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.
14. Soit $p \in [\![0; n]\!]$. Montrer à nouveau que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Partie 4 : Facultatif

On reprend les notations de la partie 3 de l'exercice 1. Démontrer par récurrence l'assertion suivante :

$$(\mathscr{N}) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k(x) A_{n-k}(y).$$

Problème II - Fonctions usuelles

On considère les fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{2\,\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}^2(x)}\right) \qquad \text{et} \qquad u : x \mapsto \frac{2\,\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}^2(x)}.$$

Partie 1 : Etude de u.

1. Déterminer $\mathscr{D}_u$ le domaine de définition de u.
2. Déterminer la limite de u en $+\infty$.
3. Préciser un équivalent simple de u au voisinage de $+\infty$ en fonction de e^{-x}.
4. Redémontrer la formule reliant ch^2 et sh^2.
5. Montrer que
$$\forall x \in \mathscr{D}_u, \qquad u'(x) = -2\frac{\mathrm{ch}^2(x)+1}{\mathrm{sh}^3(x)}.$$
6. Préciser le tableau de variation complet de u sur $\mathscr{D}_u \cap \mathbb{R}_+$.

Partie 2 : Simplification de f, méthode 1.

7. Déterminer $\mathscr{D}_f$ le domaine de définition de f.
8. Déterminer la parité de f.
9. A l'aide de la partie précédente, déterminer le tableau de variation complet de f sur $\mathscr{D}_f$.
10. Calculer la dérivée de f.
11. (a) En déduire une expression simplifiée de f sur $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}_+$.
    (b) Déterminer une expression simplifiée de f sur $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}_-$.

Partie 3 : Simplification de f, méthode 2.

Soit $y \in]1;+\infty[$

12. Montrer que $2\arctan\left(\frac{1}{y}\right) \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.
13. Simplifier $\tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{y}\right)\right)$.
14. Retrouver le résultat de la question 11.a

Problème III - Equations complexes

Partie 1 : Toujours prendre le problème par la racine

On considère (E) l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ donnée par

$$(E) \qquad P(z) = z^3 - (1+2i)\,z^2 + 3\,(1+i)\,z - 10\,(1+i) = 0.$$

1. (a) Déterminer l'ensemble des racines carrées de $\omega_0 = 5 + 12i$.
   (b) En déduire les racines carrées de $\omega_1 = -5 - 12i$ et de $\omega_2 = 5 - 12i$.
2. Démontrer que (E) possède une unique solution imaginaire pure. On notera z_1 cette solution.
3. Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que

$$P\,(z) = z^3 - (1+2i)\,z^2 + 3\,(1+i)\,z - 10\,(1+i) = (z - z_1)\left(az^2 + bz + c\right).$$

4. Résoudre l'équation (F) suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$,

$$(F) \qquad z^2 - (1+4i)\,z - 5\,(1-i) = 0.$$

5. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Partie 2 : Tournez la tête pour que la réalité devienne imaginaire

6. On fixe dans cette question $z_1 = -2i$, $z_2 = 2 + i$ et $z_3 = -1 + 3i$ et on considère la similitude

$$\begin{aligned} f : \quad & \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & z \mapsto \alpha z + \beta, \end{aligned}$$

où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

   (a) Démontrer qu'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\begin{cases} f\,(z_2) = z_2 \\ f\,(z_3) = z_1. \end{cases}$$

   (b) On prendra désormais pour α et β les valeurs déterminées à la question précédente. Déterminer la nature précise de f.
   (c) On pose $A\,(z_1)$, $B\,(z_2)$ et $C\,(z_3)$ les points du plan d'affixe z_1, z_2 et z_3 respectivement. Que peut-on en déduire sur le triangle ABC ? Justifier proprement.

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z - z_1)^n = (z + z_1)^n$
   (b) Préciser les solutions lorsque $n = 6$.

Partie 3 : Le lait est encore meilleur pris directement au pi !

Soit $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{8\pi}{7}}$.

8. Calculer $\sum_{k=0}^{6} \omega^k$.
9. En déduire que $1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) = 0$.
10. Soit $a \in \mathbb{R}$. Développer $\cos(3a)$.
11. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est une solution de l'équation $8X^3 + 4X^2 - 4X - 1 = 0$, d'inconnu $X \in \mathbb{R}$. *On en cherchera pas à résoudre cette équation.*
12. Montrer que
$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) = \frac{1}{8}.$$