Devoir Maison 4
intégrales, équations différentielles, calcul dans R, matrices

A faire pour le lundi 14 décembre

Problème I - Intégrales

Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$I(n,p) = \int_0^1 t^n (1-t)^p \, \mathrm{d}t.$$

Partie 1 : Intégrons sur CC $I(n,p)$

1. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Justifier que $I(n,p)$ existe.
2. Calculer $I(0,0)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $I(n,0)$.
4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $I(0,p)$.
5. Soit $p \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(1,p)$.
6. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.
   (a) A l'aide d'un changement de variable, montrer que $I(n,p) = I(p,n)$.
   (b) Retrouver alors le résultat de la question 5.
7. Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$I(n,p) = \frac{p}{n+1} I(n+1,p-1).$$
8. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déduire des questions 7. et 5. la valeur de $I(2,p)$.
9. Retrouver le résultat de la question précédente grâce à la question 6.a
10. A l'aide d'une récurrence sur n, montrer que
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ I(n,p) = \frac{p!n!}{(n+p+1)!}.$$
11. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.
    (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. A l'aide de la formule de binôme de Newton, écrire sous forme de somme $t^n(1-t)^p$.
    (b) En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1}$.
12. Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et $J(n,p) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (t+1)^n (1-t)^p \, \mathrm{d}t$.
    (a) Déterminer deux réels $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que l'application $s : t \mapsto at+b$ vérifie
$$s([-1;1]) = [0;1].$$
    (b) En déduire que $J(n,p) = 2^{n+p+1} I(n,p)$.

Partie 2 : Wallis n'est pas qu'une île

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad K(n,p) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(\theta)\sin^{2p+1}(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,.$$

13. Calculer W_0.
14. Calculer $V = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t$.
15. Calculer W_1.
16. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
17. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive.
18. En déduire que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

19. A l'aide du changement de variable $v = \pi - u$, exprimer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u$ en fonction de W_n.
20. En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n+1}(u)\,\mathrm{d}u$ en fonction de W_n.
21. Linéariser $\cos(\theta)\sin(\theta)$ et en déduire une expression de $K(n,n)$ en fonction de W_n.
22. Soit $p \in \mathbb{N}$. A l'aide du changement de variable $t = \cos^2(\theta)$, exprimer $I(n,p)$ en fonction de $K(n,p)$.
23. Conclure des questions précédentes que $\left(\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Problème II - Equations différentielles

Partie 1 : Ayez un instinct primitif

1. (a) Déterminer trois réels $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{2}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}.$$

   (b) En déduire l'ensemble des primitives de la fonction a : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2}{x(1+x^2)} \end{array}$.

2. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction b : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln(x) \end{array}$.

3. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction c : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1+x^2}{2}\ln(x) \end{array}$.

Partie 2 : L'ordre 1 c'est bien !

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$(E) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad xy'(x) + \frac{2y(x)}{1+x^2} = \left(1+x^2\right)\ln(x)\,.$$

4. Justifier sans la calculer l'existence d'une unique fonction y_p solution de (E) et vérifiant $y_p(1) = 0$.
5. Déterminer (E_0) l'équation différentielle homogène associée à (E) puis résoudre (E_0).
   On donnera le résultat sous forme ensembliste et sous forme de Vect.
6. En déduire $\mathscr{S}_E$ l'ensemble des solutions de l'équation (E).
7. Déterminer l'unique élément $y_p \in \mathscr{S}_E$ vérifiant $y_p(1) = 0$.

Partie 3 : L'ordre 2 c'est encore mieux !

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue z une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$(F) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad z''(x) - \frac{2xz'(x)}{1+x^2} + \frac{2z(x)}{1+x^2} = \left(1+x^2\right)\ln(x).$$

On pose également l'équation homogène associée :

$$(F_0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad z''(x) - \frac{2xz'(x)}{1+x^2} + \frac{2z(x)}{1+x^2} = 0.$$

8. Justifier brièvement pourquoi la résolution de (F) n'est pas une question de cours.
9. *(Question indépendante)* Résoudre l'équation $\left(\tilde{F}\right)$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $z''(x) - 2z'(x) + 2z(x) = 0$.
10. Déterminer l'ensemble des fonctions affines i.e. $z \in \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array} \middle| \, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ solutions de (F_0).
11. Soient z une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $Y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{z(x)}{x} \end{array}$ et $y = Y'$. Montrer que z est une solution de (F) si et seulement si y est une solution de (E).
12. En déduire l'ensemble des solutions de (F).

Partie 4 : un problème plutôt raccord avec ce qui précède

On souhaite résoudre l'équation suivant d'inconnue y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$(G) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad xy'(x) + \frac{2y(x)}{1+x^2} = 1+x^2.$$

Pour ce faire, on introduit les équations

$$(G_+) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad xy'(x) + \frac{2y(x)}{1+x^2} = 1+x^2.$$

$$(G_-) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad xy'(x) + \frac{2y(x)}{1+x^2} = 1+x^2.$$

13. Vérifier que $y_1 : x \mapsto \frac{1+x^2}{2}$ est une solution de (G_+).
14. En déduire $\mathscr{S}_+$ l'ensemble des solutions de (G_+).

15. Soit y_+ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $y_- : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y_+(-x) \end{array}$. Montrer que y_+ est une solution de (G_+) si et seulement si y_- est une solution de (G_-).
16. En déduire l'ensemble $\mathscr{S}_-$ des solutions de (G_-).
17. Conclure sur $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (G).

Problème III - Calcul dans $\mathbb{R}$

Soit $m \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer en fonction de m, $\mathscr{S}_m$ l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ solutions du système

$$(\mathcal{S}_m) \ : \ \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + my + 2z = 3 \\ x + 2y + mz = 2. \end{cases}$$

Problème IV - Matrices

Partie 1 : Ce qui nous est semblable nous est sympathique

Définition IV.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que deux matrices $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ sont semblables si et seulement si

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad A = PBP^{-1}.$$

1. Quel est l'ensemble des matrices semblables à 0_n ? à I_n ?
2. Soit $(A, B, C) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^3$.
   (a) Montrer que A est semblable à A.
   (b) Montrer que si A est semblable à B alors B est semblable à A.
   (c) Montrer que si A est semblable à B et que si B est semblable à C alors A est semblable à C.
3. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$. On suppose A semblable à B.
   (a) Montrer que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ alors $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et montrer que A^{-1} et B^{-1} sont semblables.
   (b) i. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que P^T est inversible et vérifier que $\left(P^T\right)^{-1} = \left(P^{-1}\right)^T$.
   ii. En déduire que A^T est semblable à B^T.
   (c) Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

Partie 2 : Diviser l'équipe adverse pour gagner en puissance

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Déterminer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
5. Déterminer B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
6. En déduire proprement M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Partie 3 : On voit parfois mieux en regardant de travers

On souhaite recalculer les puissances de M par une nouvelle méthode. On pose également $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Vérifier que $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et calculer P^{-1}.
8. Montrer que M est semblable à une matrice diagonale D que l'on déterminera.
9. En déduire M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ et retrouver le résultat de la question (6.).