

Epreuve de mathématiques 1

2026-2027

La calculatrice est interdite.

Toute communication et tout échange de matériel entre candidat(e)s sont interdits.

La présence d'un appareil connecté (téléphone, écouteur, montre...), y compris dans la poche, sera considéré comme une tentative de triche.

Le blanc (souris, blanco) et les stylos à encre effaçable sont interdits.

Toutes les réponses doivent être rédigées et justifiées.

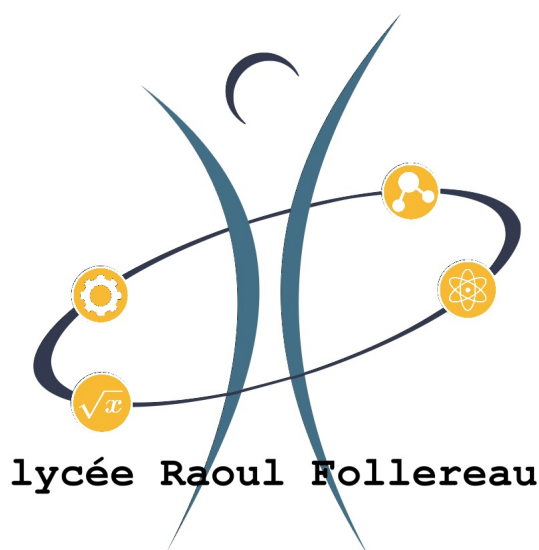
Un entête et une marge sont exigés.

Chacune des pages doit être numérotée : n° de page / nombre total de pages.

Ecrire le mot FIN à la fin de sa composition.

Tous les résultats doivent être encadrés.

Durée : 4h



Problème 1 - Logique et fonctions

Partie 1 : Généralités

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère alors les prédicats suivants :

$A(f, g)$: « Les graphes de f et g sont confondus. »

$B(f, g)$: « Les graphes de f et g se coupent en au moins un point. »

$C(f, g)$: « Il existe un voisinage de $+\infty$ où les graphes de f et g ne se coupent pas. »

$D(f, g)$: « Si les graphes de f et de g se coupent au moins deux fois alors les graphes sont confondus. »

Un voisinage de $+\infty$ est un intervalle de la forme $[A; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$.

1. Ecrire en langage mathématique chacune des assertions.
2. Enoncer (en langage mathématique toujours) la négation de chacune des assertions précédentes.
3. Enoncer la réciproque et la contraposée de $D(f, g)$.

Soient $T_1 : y = a_1x + b_1$ et $T_2 : y = a_2x + b_2$ deux droites non verticales du plan.

4. Démontrer proprement l'équivalence suivante :

$$A(T_1, T_2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}.$$

Indication : on pourra évaluer en $x = 0$ par exemple.

5. Montrer que $D(T_1, T_2)$ est vraie.

Partie 2 : Etude d'une fonction

On considère la fonction h définie par

$$h : x \mapsto x^2 + 2x(1 - \ln(2x)).$$

6. Déterminer le domaine de définition de h .
7. Justifier que h n'est ni paire ni impaire.
8. Déterminer proprement les limites aux bornes du domaine de définition.
9. Déterminer le tableau de variation complet de h . *On pourra dériver la dérivée...*
10. Préciser le comportement asymptotique en $+\infty$ de h .
11. Même question pour la fonction $H : x \mapsto \frac{h(x)}{x}$.
12. La fonction h est-elle minorée ? majorée ? bornée ?
13. La fonction h admet-elle un minimum ? un maximum ? Si oui le(s) préciser.
14. La fonction $h : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle injective ? surjective ?
15. Montrer que h définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un ensemble que l'on précisera.
On note φ sa fonction réciproque.
16. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(y) = \frac{1}{2\varphi(y) - 2\ln(2\varphi(y))}.$$

Partie 3 : Tangente commune

On s'intéresse à la question de l'existence d'une tangente commune à deux courbes. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit

$$f_m : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + m \end{array}$$

On note Γ_m la courbe représentative de f_m , pour $\beta \in \mathbb{R}$, on note $\Delta_{m,\beta}$ la tangente à Γ_m au point d'abscisse $x = \beta$. On note également $\Gamma_{\exp}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, δ_α la tangente à $\Gamma_{\exp}$ au point d'abscisse $x = \alpha$.

On fixe $m \in \mathbb{R}$.

17. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Justifier l'existence des tangentes $\Delta_{m,\beta}$ et δ_α et calculer leurs équations.
18. Montrer qu'il existe une même droite tangente à la fois à $\Gamma_{\exp}$ et à la fois à Γ_m si et seulement si

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{cases} \alpha = \ln(2\beta) \\ m = \beta^2 + 2\beta(1 - \ln(2\beta)) \end{cases}.$$

19. En déduire que $\Gamma_{\exp}$ et Γ_m ont une tangente commune si et seulement si $m > 0$.
20. Déterminer en justifiant la valeur de vérité des assertions suivantes :

$$\begin{aligned} E : & \ll \exists m \in \mathbb{R}_+^*, \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, A(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha) \gg \\ F : & \ll \forall m \in \mathbb{R}_+^*, \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, A(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha) \gg \\ G : & \ll \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall m \in \mathbb{R}_+^*, A(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha) \gg \\ H : & \ll \exists m \in \mathbb{R}_+^*, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, A(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha) \gg \\ I : & \ll \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \exists m \in \mathbb{R}_+^*, A(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha) \gg \\ J : & \ll \forall m \in \mathbb{R}_+^*, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, A(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha) \gg \end{aligned}$$

Problème 2 - Bijections

Partie 1 : Etude de h

On considère la fonction $h : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

1. Déterminer U le domaine de définition de h .
2. Déterminer la parité de h .
3. Déterminer U' le domaine de dérivabilité de h .
4. Montrer que pour tout $x \in U'$,

$$h'(x) = \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-1}}.$$

5. Préciser le comportement asymptotique de h en $+\infty$.
6. Dresser le tableau de variations complet de h .

Partie 2 : Etude de H

On pose $V =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ et pour tout $x \in V$, $H(x) = h(x)^2$.

7. Vérifier que $\forall x \in V$, $H(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

8. Dresser le tableau de variations complet de H sur V .
9. Déterminer $H([1; 2])$ et $H(]-\infty; 2])$.
10. Déterminer $H^{\leftarrow}([0; \frac{1}{2}])$.

Partie 3 : Etude de f

On considère désormais la fonction $f = \ln(h) : x \mapsto \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$.

11. Déterminer I le domaine de définition de f .
12. Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
13. Justifier que f est dérivable sur I et démontrer que pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}.$$

14. Déterminer le tableau de variation complet de f sur I .
15. Démontrer que f définit une bijection de I dans un intervalle J à préciser. On note $g = f^{-1}$.
16. Calculer g .

Partie 4 : Calcul de g par une équation différentielle

On souhaite retrouver le résultat précédent par une méthode différente. On ne pourra donc pas utiliser dans toute la suite le résultat de la question 16.

17. **Sans calculer** g , démontrer que g est dérivable sur J .
18. Toujours sans calculer g , montrer que g vérifie l'équation différentielle :

$$\forall y \in J, \quad g'(y) = g(y)(g(y)^2 - 1).$$

On pose pour tout $y \in J$, $\varphi(y) = \frac{1}{g(y)^2}$.

19. Préciser $g(J)$. En déduire que φ est bien définie et dérivable sur J .
20. Exprimer pour tout $y \in J$, $g(y)$ et $g'(y)$ en fonction de $\varphi(y)$ et $\varphi'(y)$.
21. En déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que l'on précisera tel que

$$\forall y \in J, \quad \varphi'(y) + a\varphi(y) = b \quad (\star)$$

22. Vérifier que pour tout $A \in \mathbb{R}$, la fonction $\varphi_A : \begin{matrix} J & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & 1 + Ae^{2y} \end{matrix}$ est une solution de $(\star)$.
23. On admet qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \varphi_A$ sur J . En déduire g en fonction de A .
24. Déterminer la valeur de A et retrouver alors le résultat de la question 16.

FIN