

Commentaires du DS11

Variables aléatoires et géométrie

Index des raccourcis :

- TB : très bien
- AE : à encadrer
- NJ : non justifié
- PC : pas clair
- Pq ? : pourquoi ?
- D ? : Dérivabilité ?
- H ? : Hypothèse(s) ?
- Q ... ? : Qu'est ... ? Variable non définie.

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{100}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1.1	P1.2	P1.3	P1	P2.1	P2.2	P2.3	P2.4	P2	Total	Note finale
Moyenne	-3,8	6,6	10,1	0,8	17,4	7	5,8	8	2,7	23,5	37,2	8,9
Sur		15	28	12	55	12	10	15	18	55	110	20

TOTAL : 110 pt

Problème I - Logique et fonctions **55 pt**

Partie 1 : Généralités **15 pt**

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère alors les prédicats suivants :

$A(f, g)$: « Les graphes de f et g sont confondus. »

$B(f, g)$: « Les graphes de f et g se coupent en au moins un point. »

$C(f, g)$: « Il existe un voisinage de $+\infty$ où les graphes de f et g ne se coupent pas. »

$D(f, g)$: « Si les graphes de f et de g se coupent au moins deux fois alors les graphes sont confondus. »

Un voisinage de $+\infty$ est un intervalle de la forme $[A; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$.

1. **4 pt** Ecrire en langage mathématique chacune des assertions.

Un lot global satisfaisant de bonnes réponses. Plusieurs inexactitudes cependant à corriger, quelques phrases qui ne veulent rien dire et trop souvent vous définissez f et g à l'intérieur des assertions ou le A à l'extérieur.

2. **4 pt** Enoncer (en langage mathématique toujours) la négation de chacune des assertions précédentes.

Bien globalement, des points de cohérence même si l'on s'est trompé à la question précédente. Attention cependant plusieurs ne savent pas énoncer la négation d'une implication !

3. **2 pt** Énoncer la réciproque et la contraposée de $D(f, g)$.

Idem ici, une majorité de bonnes réponses. Pour ceux qui ont eu faux ici, il s'agit d'une lacune importante dans votre façon d'apprendre puisque c'est une application directe du cours.

Soient $T_1 : y = a_1x + b_1$ et $T_2 : y = a_2x + b_2$ deux droites non verticales du plan.

4. **3 pt** Démontrer proprement l'équivalence suivante :

$$A(T_1, T_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}.$$

Indication : on pourra évaluer en $x = 0$ par exemple.

Plus difficile, notamment la gestion de x (sa définition, pour un seul ? tous ?) n'est pas claire. L'évaluation en 0 est bien mais la simplification de $a_1x = a_2x$ par x n'est pas justifié. Enfin seuls deux ou trois ont pensé à la réciproque pour démontrer l'équivalence.

5. **2 pt** Montrer que $D(T_1, T_2)$ est vraie.

Non réussie.

Partie 2 : Etude d'une fonction **28 pt**

On considère la fonction h définie par

$$h : x \mapsto x^2 + 2x(1 - \ln(2x)).$$

6. **2 pt** Déterminer le domaine de définition de h .

Bien. Quelques-uns ont été troublés du fait que l'énoncé définissait h sur $\mathbb{R}$, c'est vrai que cela n'est pas un bon énoncé.

7. **2 pt** Justifier que h n'est ni paire ni impaire.

Bien pour un bonne moitié, d'autres bricolent pour obtenir le résultat mais cela ne donne jamais une bonne justification et donc ne rapporte pas de point.

8. **2+2 pt** Déterminer proprement les limites aux bornes du domaine de définition.

Plusieurs bonnes réponses mais plus de difficultés ici globalement. Naturellement les réponses devaient être justifiées.

9. **2+2 pt** Déterminer le tableau de variation complet de h . *On pourra dériver la dérivée...*

N'oubliez pas de préciser que h est dérivable AVANT de dériver, et même deux fois dérivable. Justifiez bien le SIGNE de h'' et non ses valeurs d'annulation.

10. **2 pt** Préciser le comportement asymptotique en $+\infty$ de h .

Quelques réponses mais moins.

11. **2 pt** Même question pour la fonction $H : x \mapsto \frac{h(x)}{x}$.

Idem.

12. **2 pt** La fonction h est-elle minorée ? majorée ? bornée ?

Trop de réponses non justifiées. Citez bien les questions précédentes sur lesquelles vous vous appuyez pour votre raisonnement !

13. **2 pt** La fonction h admet-elle un minimum ? un maximum ? Si oui le(s) préciser.

Idem.

14. **2+2 pt** La fonction $h : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle injective ? surjective ?

Là aussi trop de réponses insuffisamment justifiées mais quelques-une de très correctes.

15. **2 pt** Montrer que h définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un ensemble que l'on précisera.

On note φ sa fonction réciproque.

Le théorème est souvent bien su mais pas toujours très proprement énoncé, il y a parfois des petites imprécisions ou maladresse de formulation.

16. **2 pt** Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(y) = \frac{1}{2\varphi(y) - 2\ln(2\varphi(y))}.$$

Même remarque. De plus, lorsque vous utilisez l'expression de $h'(x)$ dites bien d'après quelle question vous avez un tel résultat !

Partie 3 : Tangente commune **12 pt**

On s'intéresse à la question de l'existence d'une tangente commune à deux courbes. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit

$$f_m : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + m \end{array}$$

On note Γ_m la courbe représentative de f_m , pour $\beta \in \mathbb{R}$, on note $\Delta_{m,\beta}$ la tangente à Γ_m au point d'abscisse $x = \beta$. On note également $\Gamma_{\exp}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, δ_α la tangente à $\Gamma_{\exp}$ au point d'abscisse $x = \alpha$.

On fixe $m \in \mathbb{R}$.

17. **1+2 pt** Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Justifier l'existence des tangentes $\Delta_{m,\beta}$ et δ_α et calculer leurs équations.

Moins et même peu traitée. N'oubliez pas d'abord de bien justifier l'existence. Une poignée de bonnes réponses.

18. **2+1 pt** Montrer qu'il existe une même droite tangente à la fois à $\Gamma_{\exp}$ et à la fois à Γ_m si et seulement si

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{cases} \alpha = \ln(2\beta) \\ m = \beta^2 + 2\beta(1 - \ln(2\beta)) \end{cases}.$$

Le fait que β soit strictement positif n'est jamais justifié. Sinon deux trois bonnes réponses.

19. **2 pt** En déduire que $\Gamma_{\exp}$ et Γ_m ont une tangente commune si et seulement si $m > 0$.

Pratiquement pas abordée.

20. **4 pt** Déterminer en justifiant la valeur de vérité des assertions suivantes :

$$E : \langle \exists m \in \mathbb{R}_+^*, \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, A(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha) \rangle$$

$$F : \langle \forall m \in \mathbb{R}_+^*, \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, A(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha) \rangle$$

$$G : \langle \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall m \in \mathbb{R}_+^*, A(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha) \rangle$$

$$H : \langle \exists m \in \mathbb{R}_+^*, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, A(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha) \rangle$$

$$I : \langle \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \exists m \in \mathbb{R}_+^*, A(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha) \rangle$$

$$J : \langle \forall m \in \mathbb{R}_+^*, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, A(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha) \rangle$$

Idem.

Problème II - Bijections 55 pt

Partie 1 : Etude de h 12 pt

On considère la fonction $h : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

1. 2 pt Déterminer U le domaine de définition de h .

Le résultat est souvent juste mais sa justification est souvent trop légère voire carrément très approximative. On n'oublie pas de présenter sa variable x et de garder dans les équivalences que $x \neq 0$ tout du long.

2. 2 pt Déterminer la parité de h .

Correct. Quelques oublis de si $x \in U$, $-x \in U$.

3. 2 pt Déterminer U' le domaine de dérivabilité de h .

Trop de parachutages ou au moins de réponses mal rédigées. Il faut reprendre toute la justification et ne pas dire « j'enlève 1 et -1 »

4. 2 pt Montrer que pour tout $x \in U'$,

$$h'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$$

Pas mal de bonnes réponses mais aussi pas mal d'erreurs.

5. 2 pt Dresser le tableau de variations complet de h .

Quelques oublis de la partie négative. Quelques fois j'ai des variations incohérentes avec les limites. Deux ou trois le remarque sur leur copie, cela est apprécié.

Partie 2 : Etude de H 10 pt

On pose $V =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ et pour tout $x \in V$, $H(x) = h(x)^2$.

6. 2 pt Vérifier que $\forall x \in V$, $H(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

Facile, ok.

7. 2 pt Dresser le tableau de variations complet de H sur V .

Correct dans l'ensemble. N'oubliez pas d'écrire les limites AVANT de faire le tableau complet.

8. 3 pt Déterminer $H([1; 2])$ et $H(]-\infty; 2])$.

Trop peu de réponses cite le tableau de variations comme justification. Egalement pas mal d'erreurs aussi.

9. 3 pt Déterminer $H^{\leftarrow}([0; \frac{1}{2}])$.

Plusieurs bonnes réponses et sinon pas mal d'erreurs. A retravailler.

Partie 3 : Etude de f 15 pt

On considère désormais la fonction $f = \ln(h) : x \mapsto \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$.

10. 2 pt Déterminer I le domaine de définition de f .
 Bien mais trop de réponses insuffisamment justifiées ou rédigées.

11. 2 pt Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
 On utilise la limite de h en $+\infty$ il faut donc citer la question d'où l'on tire le résultat.

12. 2+2 pt Justifier que f est dérivable sur I et démontrer que pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}.$$

La dérivabilité est traitée (lorsque c'est le cas!) bien trop rapidement, personne n'a eu ces points il me semble. Le calcul de la dérivée est lui très correct.

13. 2 pt Déterminer le tableau de variation complet de f sur I .
 Bien, la aussi soignez un peu la rédaction.
14. 2 pt Démontrer que f définit une bijection de I dans un intervalle J à préciser. On note $g = f^{-1}$.
 Citez bien la question précédente.

15. 3 pt Calculer g .
 La méthode est souvent sue mais les calculs peu justifiés et surtout vous oubliez de définir proprement x et y ce qui est important dans ce calcul. Plusieurs résultats corrects mais pas énormément.

Partie 4 : Calcul de g par une équation différentielle 18 pt

On souhaite retrouver le résultat précédent par une méthode différente. On ne pourra donc pas utiliser dans toute la suite le résultat de la question ??

16. 2 pt **Sans calculer** g , démontrer que g est dérivable sur J .
 Bien trop peu de bonnes réponses, vous ne connaissez pas ou ne maîtrisez pas assez les théorèmes du cours avec toutes leurs hypothèses et conclusions.

17. 2 pt Toujours sans calculer g , montrer que g vérifie l'équation différentielle :

$$\forall y \in J, \quad g'(y) = g(y) (g(y)^2 - 1).$$

Sans trop de difficulté mais pas très souvent traitée.

On pose pour tout $y \in J$, $\varphi(y) = \frac{1}{g(y)^2}$.

18. 2 pt Préciser $g(J)$. En déduire que φ est bien définie et dérivable sur J .
 Quelques réponses correctes mais plusieurs réponses pas très claires.
19. 2 pt Exprimer pour tout $y \in J$, $g(y)$ et $g'(y)$ en fonction de $\varphi(y)$ et $\varphi'(y)$.
 Pas très difficile mais peu réussie.

20. **3 pt** En déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que l'on précisera tel que

$$\forall y \in J, \quad \varphi'(y) + a \varphi(y) = b \quad (\star)$$

Peu traitée, un ou deux bonnes réponses.

21. **2 pt** Vérifier que pour tout $A \in \mathbb{R}$, la fonction $\varphi_A : \begin{array}{ccc} J & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & 1 + A e^{2y} \end{array}$ est une solution de $(\star)$.

Idem.

22. **2 pt** On admet qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \varphi_A$ sur J . En déduire g en fonction de A .

Certains utilisent la question 16 ici ou à la question d'après ce qui est interdit dans la consigne de cette partie.

23. **3 pt** Déterminer la valeur de A et retrouver alors le résultat de la question ??

Aucune bonne réponse.

FIN