

Corrigé du Devoir Surveillé 1

Logique, fonctions et bijections

Problème I - Logique et fonction

Partie 1 : Généralités

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère alors les prédicats suivants :

$A(f, g)$: « Les graphes de f et g sont confondus. »

$B(f, g)$: « Les graphes de f et g se coupent en au moins un point. »

$C(f, g)$: « Au voisinage de $+\infty$ les graphes de f et g ne se coupent pas. »

$D(f, g)$: « Si les graphes de f et de g se coupent au moins deux fois alors les graphes sont confondus. »

Un voisinage de $+\infty$ est un intervalle de la forme $[A; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$.

1. Les graphes de deux fonctions sont complètement confondus si et seulement si les deux fonctions sont égales :

$$A(f, g) \Leftrightarrow f = g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x).$$

Les deux graphes se coupent :

$$B(f, g) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x).$$

Pour le voisinage de l'infini, on écrit

$$C(f, g) \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in [A; +\infty[, f(x) \neq g(x).$$

Enfin, on a

$$D(f, g) \Leftrightarrow \left[\left(\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y, \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(y) = g(y) \end{cases} \right) \Rightarrow (\forall u \in \mathbb{R}, f(u) = g(u)) \right].$$

2. On obtient les négations suivantes :

$$\begin{array}{lll} \overline{A(f, g)} & \Leftrightarrow & f \neq g \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq g(x) \\ \overline{B(f, g)} & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq g(x) \\ \overline{C(f, g)} & \Leftrightarrow & \forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in [A; +\infty[, f(x) = g(x). \end{array}$$

Puis,

$$\overline{D(f, g)} \Leftrightarrow \left[\left(\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y, \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(y) = g(y) \end{cases} \right) \text{ ET } (\exists u \in \mathbb{R}, f(u) \neq g(u)) \right].$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$\overline{D(f, g)} \Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \neq y, \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(y) = g(y) \\ f(z) \neq g(z) \end{cases}.$$

3. La réciproque de $D(f, g)$ est

$$(\forall u \in \mathbb{R}, f(u) = g(u)) \Rightarrow \left(\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y, \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(y) = g(y) \end{cases} \right).$$

La contraposée est donnée par

$$(\exists u \in \mathbb{R}, f(u) \neq g(u)) \Rightarrow [\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y, (f(x) \neq g(x) \text{ OU } f(y) \neq g(y))].$$

Soient $T_1 : y = a_1x + b_1$ et $T_2 : y = a_2x + b_2$ deux droites non verticales du plan.

4. Procédons par double implication. Supposons $A(T_1, T_2)$ vraie. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, T_1(x) = T_2(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, a_1x + b_1 = a_2x + b_2.$$

En particulier, pour $x = 0$, alors, $0 + b_1 = 0 + b_2 \Leftrightarrow b_1 = b_2$. Dès lors, pour $x = 1$, on obtient aussi,

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2.$$

Comme $b_1 = b_2$, on a donc $a_1 + b_1 = a_2 + b_1$ i.e. $a_1 = a_2$. On a donc bien

$$A(T_1, T_2) \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}.$$

Réciproquement, supposons $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$. Alors directement pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$a_1x + b_1 \underset{a_1=a_2}{=} a_2x + b_1 \underset{b_1=b_2}{=} a_2x + b_2.$$

Ceci étant vrai pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque, on en déduit que

$$\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases} \Rightarrow A(T_1, T_2)$$

Conclusion,

$$A(T_1, T_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}.$$

5. Montrons $D(T_1, T_2)$. Supposons qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y$ tels que $T_1(x) = a_1x + b_1 = T_2(x) = a_2x + b_2$ et $T_1(y) = a_1y + b_1 = T_2(y) = a_2y + b_2$. Alors,

$$\begin{cases} a_1x + b_1 = a_2x + b_2 \\ a_1y + b_1 = a_2y + b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1x + b_1 = a_2x + b_2 \\ a_1(y - x) = a_2(y - x) \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

Or $x \neq y$ donc $y - x \neq 0$. Donc

$$\begin{cases} a_1x + b_1 = a_2x + b_2 \\ a_1 = a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1x + b_1 = a_1x + b_2 \\ a_1 = a_2 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = b_2 \\ a_1 = a_2 \end{cases}.$$

Donc par la question précédente, $A(T_1, T_2)$ est vraie :

$$\forall u \in \mathbb{R}, T_1(u) = T_2(u).$$

Conclusion,

$$D(T_1, T_2) \text{ est vraie.}$$

Partie 2 : Etude d'une fonction

On considère la fonction h définie par

$$h : x \mapsto x^2 + 2x(1 - \ln(2x)).$$

6. Notons $\mathcal{D}_h$ le domaine de définition de h . On a les équivalences suivantes :

$$x \in \mathcal{D}_h \Leftrightarrow h(x) \text{ existe} \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Conclusion,

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*.$$

7. Puisque $\mathcal{D}_h$ n'est pas un ensemble centré en 0, on en déduit directement que

la fonction h n'est ni paire ni impaire.

8. Soit $x > 0$. On a

$$h(x) = x^2 + 2x(1 - \ln(2x)) = x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln(2)}{x} - \frac{2\ln(x)}{x} \right).$$

Or on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(2)}{x} = 0$ et par croissance comparée, on a aussi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(x)}{x} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln(2)}{x} - \frac{2\ln(x)}{x} = 1.$$

Conclusion, par produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

D'un autre côté, pour tout $x > 0$,

$$h(x) = x^2 + 2x - 2x\ln(2) - 2x\ln(x).$$

Or par croissance comparée, $x\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Donc par somme,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = 0.$$

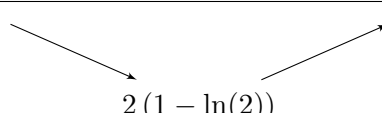
9. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme et composée de fonctions qui le sont et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(x) = 2x + 2(1 - \ln(2x)) + 2x \left(-\frac{1}{x} \right) = 2x + 2 - 2\ln(2x) - 2 = 2x - 2\ln(2x).$$

Etudions les variations de la fonction h' . Posons $h_1 = h'$. La fonction h_1 est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$,

$$h_1'(x) = 2 - 2\frac{1}{x} = 2\frac{x-1}{x}.$$

Or pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h_1'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $h_1'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$. Enfin, on a $h_1(1) = 2 - 2\ln(2) = 2(1 - \ln(2))$. On obtient donc le tableau de variation suivant de h_1 :

x	0	1	$+\infty$
$h_1'(x)$		− 0 +	
h_1			

On observe donc que $2(1 - \ln(2))$ est un minimum de h_1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h_1(x) \geq 2(1 - \ln(2)).$$

Or $1 - \ln(2) > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln(2) \Leftrightarrow e > 2$ qui est vrai. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h_1(x) > 0.$$

La fonction h est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, à l'aide de la question précédente, on en conclut le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
h	0	$+\infty$

10. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{h(x)}{x} = x + 2(1 - \ln(2x)) = x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{\ln(2)}{x} - \frac{\ln(x)}{x} \right).$$

Par croissance comparée, $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Donc par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{x} - \frac{\ln(2)}{x} - \frac{\ln(x)}{x} = 1.$$

Donc par produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty.$$

Conclusion,

le graphe de h admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

11. Par ce qui précède,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad H(x) = x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{\ln(2)}{x} - \frac{\ln(x)}{x} \right).$$

Par la question précédente, $H(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{H(x)}{x} = \frac{h(x)}{x^2} = 1 + \frac{2}{x} - \frac{\ln(2)}{x} - \frac{\ln(x)}{x}.$$

Donc de même que précédemment,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{H(x)}{x} = 1.$$

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$H(x) - x = x \left(\frac{2}{x} - \frac{\ln(2)}{x} - \frac{\ln(x)}{x} \right) = 2 - \ln(2) - \ln(x).$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) - x = -\infty.$$

Conclusion,

Le graphe de H admet une branche parabolique de direction $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

12. D'après ses variations (question 9.) on observe que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) > 0$. Donc 0 est un minorant de h :

la fonction h est minorée.

Cependant, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$, on en déduit que

h n'est pas majorée et donc n'est pas bornée non plus a fortiori.

13. Puisque la fonction h n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$, la minorant 0 n'est jamais atteint donc

la fonction h n'a pas de minimum.

Puisque la fonction h n'a pas de majorant, on en déduit que

la fonction h n'a pas de maximum.

14. Par la question 9. la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par le théorème de la bijection, la fonction h définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $h(\mathbb{R}_+^*)$ et de plus,

$$h(\mathbb{R}_+^*) = \left] \lim_{0^+} h; \lim_{+\infty} h \right[=]0; +\infty[.$$

Donc tout réel dans l'ensemble image $h(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$ admet un unique antécédent et tout réel de l'ensemble $\mathbb{R}_-$ n'admet aucun antécédent. Globalement tout réel de $\mathbb{R}$ admet un ou aucun antécédent (et jamais deux ou plus). Ainsi,

la fonction $h : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est injective.

Par ce qui précède, on note aussi que tout réel négatif ou nul n'admet aucun antécédent par h . Conclusion,

la fonction $h : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas surjective.

15. Puisque la fonction h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, par le théorème de la bijection, h définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $h(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$

On note φ sa fonction réciproque.

16. On a déjà vu dans les questions précédentes que la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(x) = 2x - 2 \ln(2x) \geq h'(1) > 0$$

Donc sur $I = \mathbb{R}_+^*$, on a

- h est dérivable sur I ,
- h est strictement croissante sur I ,
- $\forall x \in I, h'(x) \neq 0$.

Donc par le théorème de la dérivée de la fonction réciproque, on en déduit que φ est dérivable sur $J = h(I) = \mathbb{R}_+^*$ et de plus,

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(y) = \frac{1}{h'(\varphi(y))} = \frac{1}{2\varphi(y) - 2 \ln(2\varphi(y))}.$$

Conclusion, φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(y) = \frac{1}{2\varphi(y) - 2 \ln(2\varphi(y))}.$$

Partie 3 : Tangente commune

On s'intéresse à la question de l'existence d'une tangente commune à deux courbes. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit

$$f_m : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + m \end{array}$$

On note Γ_m la courbe représentative de f_m , pour $\beta \in \mathbb{R}$, on note $\Delta_{m,\beta}$ la tangente à Γ_m au point d'abscisse $x = \beta$. On note également $\Gamma_{\exp}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, δ_α la tangente à $\Gamma_{\exp}$ au point d'abscisse $x = \alpha$.

On fixe $m \in \mathbb{R}$.

17. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable en α et donc δ_α existe. De même, f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et donc en β et donc $\Delta_{m,\beta}$ existe. Conclusion,

$$\text{pour tout } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \delta_\alpha \text{ et } \Delta_{m,\beta} \text{ existent.}$$

De plus, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\delta_\alpha : \quad y = \exp'(\alpha)(x - \alpha) + \exp(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad y = e^\alpha(x - \alpha) + e^\alpha = e^\alpha(x - \alpha + 1).$$

De même, pour $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\Delta_{m,\beta} : \quad y = f'_m(\beta)(x - \beta) + f_m(\beta) \quad \Leftrightarrow \quad y = 2\beta(x - \beta) + \beta^2 + m = 2x\beta - \beta^2 + m.$$

Conclusion,

$$\begin{array}{ll} \delta_\alpha : & y = e^\alpha(x - \alpha + 1). \\ \Delta_{m,\beta} : & y = 2x\beta - \beta^2 + m. \end{array}$$

18. Il existe une même droite tangente commune à $\Gamma_{\exp}$ et à Γ_m si et seulement si

$$\begin{aligned} \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \delta_\alpha = \Delta_{m,\beta} & \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^\alpha(x - \alpha + 1) = 2x\beta - \beta^2 + m \\ & \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^\alpha x + e^\alpha(1 - \alpha) = 2x\beta - \beta^2 + m. \end{aligned}$$

Par la question 4. avec $a_1 = e^\alpha$, $b_1 = e^\alpha(1 - \alpha)$, $a_2 = 2\beta$, $b_2 = m - \beta^2$,

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \delta_\alpha = \Delta_{m,\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} e^\alpha = 2\beta \\ e^\alpha(1 - \alpha) = m - \beta^2 \end{cases}.$$

Premier cas, si $\beta \leq 0$, alors $e^\alpha = 2\beta$ est impossible, donc

$$\begin{aligned} \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \delta_\alpha = \Delta_{m,\beta} & \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{cases} e^\alpha = 2\beta \\ e^\alpha(1 - \alpha) = m - \beta^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{cases} \alpha = \ln(2\beta) \\ e^\alpha(1 - \alpha) = m - \beta^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{cases} \alpha = \ln(2\beta) \\ 2\beta(1 - \ln(2\beta)) = m - \beta^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \delta_\alpha = \Delta_{m,\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{cases} \alpha = \ln(2\beta) \\ m = 2\beta(1 - \ln(2\beta)) + \beta^2. \end{cases}$$

19. Par la question précédente et la partie 2 on a

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \delta_\alpha = \Delta_{m,\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{cases} \alpha = \ln(2\beta) \\ m = h(\beta) \end{cases}$$

Or on sait que $h : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est bijective donc tout réel $m \in \mathbb{R}_+^*$ admet un et un seul antécédent par h . Donc si $m > 0$,

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \delta_\alpha = \Delta_{m,\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{cases} \alpha = \ln(2\beta) \\ \beta = \varphi(m) \end{cases}$$

Si $m > 0$, alors on peut trouver un réel strictement positif $\beta = \varphi(m) > 0$ et un réel $\alpha = \ln(2\beta)$ et donc les deux courbes admettent une tangente commune. Au contraire si $m \leq 0$, alors m n'admet aucun antécédent par $h : m = h(\beta)$ n'admet aucune solution. Conclusion,

$$\boxed{\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \delta_\alpha = \Delta_{m,\beta} \quad \Leftrightarrow \quad m > 0.}$$

20. Par la question précédente, l'assertion $\boxed{E \text{ est vraie}}$ en effet pour $m = 1 \in \mathbb{R}_+^*$ par exemple, alors en prenant $\beta = \varphi(1)$ et $\alpha = \ln(2\beta)$, on a bien $A(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha)$.

Mieux, l'assertion $\boxed{F \text{ est vraie}}$, pour tout $m \in \mathbb{R}_+^*$, on peut trouver $\beta = \varphi(m)$ et $\alpha = \ln(\beta)$ tel que $A(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha)$ soit vraie.

L'assertion $\boxed{G \text{ est fausse}}$. Procédons par l'absurde, supposons G vraie :

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall m \in \mathbb{R}_+^*, \quad A(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha)$$

Alors de même qu'à la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^\alpha x + e^\alpha (1 - \alpha) = 2x\beta - \beta^2 + m & \Leftrightarrow \begin{cases} e^\alpha = 2\beta \\ e^\alpha (1 - \alpha) = m - \beta^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \beta > 0 \\ \alpha = \ln(2\beta) \\ m = \beta^2 + 2\beta(1 - \ln(2\beta)) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \beta > 0 \\ \alpha = \ln(2\beta) \\ m = h(\beta) \end{cases} \end{aligned}$$

Donc notamment, on a

$$\exists \beta > 0, \quad \forall m \in \mathbb{R}_+^*, \quad m = h(\beta).$$

Autrement dit il existe un réel β tel que son image (qui est unique aussi) décrit $\mathbb{R}_+^*$ tout entier. Impossible, on ne peut pas avoir $h(\beta) = 1$ et $h(\beta) = 2$.

L'assertion $\boxed{H \text{ est fausse}}$. En effet, de même que précédemment, si on fixe $m \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\beta = \varphi(m)$ est aussi fixé et donc l'assertion $A(\Delta_{m,\beta}, \delta_\alpha)$ ne peut pas être vraie pour tout β (*on pouvait aussi signaler que cela ne pouvait pas fonctionner pour tout β car β doit être strictement positif*).

L'assertion $\boxed{I \text{ est fausse}}$ car l'assertion $e^\alpha = 2\beta$ ne fonctionne pas pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Si on fixe β , alors $\alpha = \ln(2\beta)$ ne peut prendre qu'une seule valeur et réciproquement.

Puisque l'assertion H est fausse, a fortiori $\boxed{J \text{ est fausse}}$ aussi.

Problème II - Bijection

Partie 1 : Etude de h

On considère la fonction $h : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

1. Calculons U le domaine de définition de h . Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} x \in U &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \text{ OU } x \leq -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x \geq 1 \text{ OU } x \leq -1. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$U =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[.$$

2. Déterminons la parité de h .

- On note que U est centré en 0.
- Soit $x \in U$. On a

$$h(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^2 - 1}}{-x} = -\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = -h(x).$$

Conclusion,

$$\text{la fonction } h \text{ est impaire.}$$

3. Soit U' le domaine de dérivabilité de h . Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} x \in U' &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \text{ OU } x < -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x > 1 \text{ OU } x < -1. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$U' =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[.$$

4. Montrons que pour tout $x \in U'$, $h'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$. Par la question précédente, la fonction h est

dérivable sur U' . De plus,

$$\begin{aligned}\forall x \in U', \quad h'(x) &= \frac{(\sqrt{x^2 - 1})' x - \sqrt{x^2 - 1}}{x^2} \\ &= \frac{\frac{(x^2 - 1)'}{2\sqrt{x^2 - 1}} x - \sqrt{x^2 - 1}}{x^2} \\ &= \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} x - \sqrt{x^2 - 1}}{x^2} \\ &= \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - \sqrt{x^2 - 1}}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in U', \quad h'(x) = \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}.}$$

5. Déterminons le comportement asymptotique de h en $+\infty$. Pour tout $x \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}h(x) &= \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \\ &= \frac{x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} \quad \text{car } x > 0 \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1.$$

Conclusion,

le graphe de h présente en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = 1$.

6. Déterminons le tableau de variation de h . Par la question 4. on a

$$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, \quad h'(x) = \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$$

Donc pour tout $x > 1$, $h'(x) > 0$. Donc la fonction h est strictement croissante sur $]1; +\infty[$. De plus la fonction h est définie et même continue sur $[1; +\infty[$. Donc par continuité en 1, on obtient que h est strictement croissante sur $[1; +\infty[$. D'autre part, $h(1) = \frac{\sqrt{1-1}}{1} = 0$ et par la question précédente, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$. Ainsi,

x	1	$+\infty$
h	0	1

Par imparité de fonction h , on en conclut

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
h	-1	0	0	1

Partie 2 : Etude de H

On pose $V =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ et pour tout $x \in V$, $H(x) = h(x)^2$.

7. Montrons que $\forall x \in V$, $H(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

On note que $V = U$ donc par la question 1., H est bien définie sur V . Soit $x \in V$. On a

$$H(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right)^2 = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Conclusion,

$$\forall x \in V, \quad H(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

8. Déterminons le tableau de variations de H .

On note que V est centré en 0 et pour tout $x \in V$, $H(-x) = 1 - \frac{1}{(-x)^2} = 1 - \frac{1}{x^2} = H(x)$. Donc la fonction H est paire. Etudions H sur $[1; +\infty[$. La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ donc $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est strictement décroissante puis $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est strictement croissante donc H est strictement croissante sur $[1; +\infty[$. On pouvait aussi étudier sa dérivée : $H'(x) = \frac{2}{x^3} > 0$. De plus, $H(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 1$. Conclusion, par parité de H , on obtient

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
h	1	0	0	1

9. Déterminons $H([1; 2])$ et $H(]-\infty; 2])$.

On a $H(1) = 0$ et $H(2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Donc par la croissance de H et sa continuité on en déduit que

$$H([1; 2]) = \left[0; \frac{3}{4} \right].$$

De plus, par son tableau de variation, on en déduit également que

$$H(]-\infty; 2]) = [0; 1[.$$

10. Calculons $H^{\leftarrow} \left(\left[0; \frac{1}{2} \right] \right)$.

Soit $x \in V$. On a

$$\begin{aligned} H(x) = \frac{1}{2} & \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow x^2 = 2 \quad \text{car } x \neq 0 \\ & \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ OU } x = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

D'où,

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
h	1 $\searrow$ $\frac{1}{2}$ $\searrow$ 0		0		0 $\nearrow$ $\frac{1}{2}$ $\nearrow$ 1	

Conclusion,

$$H^{\leftarrow} \left(\left[0; \frac{1}{2} \right] \right) = [-\sqrt{2}; -1] \cup [1; \sqrt{2}].$$

Partie 3 : Etude de f

On considère désormais la fonction $f = \ln(h) : x \mapsto \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$.

11. Calculons I le domaine de définition de f . Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} x \in I & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} > 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-1} \neq 0 \\ x > 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \text{ OU } x < -1 \\ x > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow x > 1. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$I =]1; +\infty[.$$

12. Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Pour tout $x > 1$, on a

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Donc par composition,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.}$$

13. Montrons que f est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$.

ATTENTION, ne pas dire que f est dérivable sur son domaine de définition car ce n'est pas le cas en général de la fonction racine carrée !

On a vu que la fonction h est dérivable sur $U =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ donc notamment sur $I =]1; +\infty[$. De plus, par la question 6. on sait que $h(]1; +\infty[) =]0; 1[$ donc h est à valeurs sur $\mathbb{R}_+^*$ sur I et la fonction logarithme est dérivable sur $]0; +\infty[$. Donc par composée,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable sur } I.}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad f'(x) &= (\ln \circ h)'(x) \\ &= \frac{h'(x)}{h(x)} \\ &= \frac{\frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}}{\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}} \quad \text{par la question 4.} \\ &= \frac{x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1} \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{x(x^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}.$$

14. Déterminons le tableau de variations de f sur I .

Par la question précédente, $\forall x \in I$, $f'(x) = \frac{1}{x(x^2-1)} > 0$ car $x > 1$. Donc la fonction f est strictement croissante sur I . De plus, on a vu que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Enfin,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x^2 - 1 = 0^+,$$

donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 0^+$. D'où

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right) = -\infty.$$

Conclusion,

x	1	$+\infty$
f	$-\infty$	0

15. Montrons que f définit une bijection.

Par ce qui précède,

- La fonction f est continue sur I (car dérivable)
- la fonction f est strictement croissante sur I

Donc par le théorème de la bijection,

$$f \text{ définit une bijection de } I \text{ dans } J = f(I) =]-\infty; 0[.$$

On note $g = f^{-1}$.

16. Soient $x \in I =]1; +\infty[$ et $y \in J =]-\infty; 0[$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right) \\ &\Leftrightarrow e^y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \\ &\Leftrightarrow x e^y = \sqrt{x^2 - 1} \\ &\Leftrightarrow (x e^y)^2 = x^2 - 1 \quad \text{car } \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x e^y > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x^2 e^{2y} = x^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 (1 - e^{2y}) = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{1 - e^{2y}} \quad \text{car } 1 - e^{2y} > 0 \text{ car } y < 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{2y}}} \quad \text{car } 1 - e^{2y} > 0 \text{ et } x > 0. \end{aligned}$$

Conclusion, on en déduit que

$$g : \begin{array}{ccc}]-\infty; 0[& \rightarrow &]1; +\infty[\\ y & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{1 - e^{2y}}} \end{array}.$$

Partie 4 : Calcul de g par une équation différentielle

On souhaite retrouver le résultat précédent par une méthode différente. On ne pourra donc pas utiliser dans toute la suite le résultat de la question 16.

17. Montrons que g est dérivable sur J . On observe que

- la fonction f est dérivable sur I d'après la question 13.
- la fonction f est strictement croissante sur I d'après la question 14.
- pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)} \neq 0$.

Donc par le théorème de la dérivée de la réciproque, on en conclut que

$$\text{la fonction } g \text{ est dérivable sur } J =]-\infty; 0[.$$

18. Montrons que g vérifie l'équation différentielle : $\forall y \in J, \quad g'(y) = g(y) (g(y)^2 - 1)$.

Toujours par le théorème de la dérivée de la réciproque, on sait de plus que, pour tout $y \in J$,

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Or pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$ et pour tout $y \in J$, $x = g(y) \in I$ donc

$$\forall y \in J, g'(y) = \frac{1}{\frac{1}{g(y)(g^2(y)-1)}} = g(y)(g(y)^2 - 1).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall y \in J, g'(y) = g(y)(g(y)^2 - 1)}.$$

On pose pour tout $y \in J$, $\varphi(y) = \frac{1}{g(y)^2}$.

19. Précisons $g(J)$ et vérifions que φ est dérivable sur J .

On sait que f est une bijection de I dans J . La fonction $g = f^{-1}$ étant la fonction réciproque de f est une bijection de J dans I . Nécessairement,

$$\boxed{g(J) = I =]1; +\infty[}.$$

Par conséquent, pour tout $y \in J$, $g(y) \in]1; +\infty[$ et donc $g(y) > 1 > 0$. Dès lors pour tout $y \in J$, $g(y)^2 \neq 0$. Par conséquent,

$$\boxed{\varphi \text{ est bien définie sur } J}.$$

La fonction $y \mapsto g(y)^2$ est dérivable sur J et ne s'annule pas. La fonction $u \mapsto \frac{1}{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par composée, on en conclut que

$$\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur } J}.$$

20. Exprimons pour tout $y \in J$, $g(y)$ et $g'(y)$ en fonction de $\varphi(y)$ et $\varphi'(y)$. Soit $y \in J$. Puisque $\varphi(y) = \frac{1}{g(y)^2}$, on en déduit que $\varphi(y) \in \mathbb{R}_+^*$. Puis, on observe directement que

$$g(y)^2 = \frac{1}{\varphi(y)} \Rightarrow g(y) = \frac{1}{\sqrt{\varphi(y)}}.$$

D'où

$$\boxed{\forall y \in J, g(y) = \frac{1}{\sqrt{\varphi(y)}}}.$$

De plus, en dérivant car g et φ sont dérivables et $\varphi > 0$ implique que $\sqrt{\varphi}$ est aussi dérivable, on a

$$\forall y \in J, g'(y) = \left(\varphi(y)^{-1/2} \right)' = -\frac{1}{2} \varphi'(y) \varphi(y)^{-3/2} = -\frac{\varphi'(y)}{2 \varphi(y) \sqrt{\varphi(y)}}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall y \in J, g'(y) = -\frac{\varphi'(y)}{2 \varphi(y) \sqrt{\varphi(y)}}}.$$

21. Déterminons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall y \in J, \varphi'(y) + a \varphi(y) = b$ (★).

On sait que pour tout $y \in J$, $g'(y) = g(y)(g(y)^2 - 1)$. Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned} \forall y \in J, \quad & -\frac{\varphi'(y)}{2 \varphi(y) \sqrt{\varphi(y)}} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(y)}} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi(y)}} \right)^2 - 1 \right) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall y \in J, \quad -\varphi'(y) = \frac{2 \varphi(y) \sqrt{\varphi(y)}}{\sqrt{\varphi(y)}} \left(\frac{1}{\varphi(y)} - 1 \right) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall y \in J, \quad -\varphi'(y) = 2 \varphi(y) \frac{1 - \varphi(y)}{\varphi(y)} \\ \Leftrightarrow \quad & \forall y \in J, \quad -\varphi'(y) = 2(1 - \varphi(y)) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall y \in J, \quad \varphi'(y) = -2(1 - \varphi(y)) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall y \in J, \quad \varphi'(y) - 2 \varphi(y) = -2. \end{aligned}$$

Conclusion, en prenant $a = b = -2$, on obtient

$$\boxed{\forall y \in J, \quad \varphi'(y) - 2\varphi(y) = -2. \quad (\star)}$$

22. Montrons donc que pour tout $A \in \mathbb{R}$, la fonction $\varphi_A : \begin{matrix} J & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & 1 + Ae^{2y} \end{matrix}$ est une solution de $(\star)$. Soit

$A \in \mathbb{R}$. Posons $\varphi_A : \begin{matrix} J & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & 1 + Ae^{2y} \end{matrix}$. La fonction exponentielle étant dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction φ_A est dérivable sur J et

$$\forall y \in J, \quad \varphi'_A(y) = 2Ae^{2y}.$$

Dès lors,

$$\forall y \in J, \quad \varphi'_A(y) - 2\varphi_A(y) = 2Ae^{2y} - 2(1 + Ae^{2y}) = 2Ae^{2y} - 2 - 2Ae^{2y} = -2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi_A : \begin{matrix} J & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & 1 + Ae^{2y} \end{matrix} \text{ est une solution de } (\star).}$$

23. On admet qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \varphi_A$ sur J . Déterminons g en fonction de A . On sait que $\forall y \in J, \varphi(y) = 1 + Ae^{2y}$ et que $g(y) = \frac{1}{\sqrt{\varphi(y)}}$. Par conséquent,

$$\boxed{\forall y \in J, \quad g(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + Ae^{2y}}}.$$

24. Déterminons A et concluons. On a

$$f(2) = \ln\left(\frac{\sqrt{4-1}}{2}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Par conséquent, on obtient que

$$g\left(\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 2.$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + Ae^{2\left(\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}}} = 2 & \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + Ae^{\ln\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)}}} = 2 \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + Ae^{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}}} = 2 \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + A\left(\frac{3}{4}\right)}} = 2 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{3}{4}A} = \frac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow 1 + \frac{3}{4}A = \frac{1}{4} \\ & \Leftrightarrow \frac{3}{4}A = -\frac{3}{4} \\ & \Leftrightarrow A = -1. \end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{A = 1}$ et

$$\boxed{g : \begin{matrix}]-\infty; 0[& \rightarrow &]1; +\infty[\\ y & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{1-e^{2y}}}. \end{matrix}}$$

On retrouve bien le résultat de la question 16.

Enthousiasme, admiration et bonheur !

FIN