Epreuve de mathématiques 2

2026-2027

La calculatrice est interdite.
Toute communication et tout échange de matériel entre candidat(e)s sont interdits.
La présence d'un appareil connecté (téléphone, écouteur, montre...), y compris dans la poche, sera considéré comme une tentative de triche.
Le blanc (souris, blanco) et les stylos à encre effaçable sont interdits.

Toutes les réponses doivent être rédigées et justifiées.
Un entête et une marge sont exigés.
Chacune des pages doit être numérotée : n° de page / nombre total de pages.
Ecrire le mot FIN à la fin de sa composition.
Tous les résultats doivent être encadrés.

Durée : 4h

lycée Raoul Follereau

Problème 1 - Trigonométrie

1. (a) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. *On pourra observer que* $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \ldots$
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation suivante d'inconnu $\theta \in \mathbb{R}$:
   $$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos(\theta) + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin(\theta) = 2.$$
   (c) Représenter sur le cercle les solutions qui sont entre $-\pi$ et π.
2. (a) Résoudre l'inéquation suivante d'inconnu $x \in \mathbb{R}$,
   $$\cos(\pi x) > \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right).$$
   (b) Représenter sur le cercle les solutions qui sont entre $-\pi$ et π.
3. Résoudre l'équation suivante d'inconnu $x \in \mathbb{R}$,
   $$\sin(x)\tan(x) + 2\cos(x) = 2.$$
4. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, linéariser $16\cos(\theta)\sin^4(\theta)$.
   (b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation suivante d'inconnu $\theta \in \mathbb{R}$:
   $$\cos(\theta) - 3\cos(3\theta) + \cos(5\theta) = 0.$$

Problème 2 - Complexes

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & \frac{1}{\overline{z}+i} \end{array}$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble de définition de f.

1. Déterminer $\mathcal{D}$ et justifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{C}^*$.
2. (a) Déterminer $f^{\leftarrow}(\mathbb{R}^*)$.
   (b) Déterminer $f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$.
   (c) Représenter $f^{\leftarrow}(\mathbb{R}^*)$ et $f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$ dans le plan.
3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Donner la forme algébrique de $f(ix)$.
   (b) En déduire que $f(i\mathbb{R}\setminus\{i\}) \subseteq i\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
   (c) Montrer également que $i\mathbb{R}\setminus\{0\} \subseteq f(i\mathbb{R}\setminus\{i\})$.
   (d) Conclusion ? Donner une représentation graphique de $f(i\mathbb{R}\setminus\{i\})$.
4. (a) Montrer que f est injective sur $\mathcal{D}$.
   (b) Montrer que f est surjective sur $\mathbb{C}^*$.
   (c) Que peut-on en déduire ?

Problème 3 - Calcul algébrique

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} k^\alpha 2^{a_k},$$

avec $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 0$. Préciser S_n pour $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.
2. On suppose que $\alpha = 0$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$. Calculer S_n.

On suppose dans toute la suite que

$$\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ a_k = k.$$

On propose ni une ni deux ni trois mais quatre méthodes pour calculer S_n !

3. Calculer S_1 et S_2.
4. *(Par un changement d'indice)*
   (a) Montrer que $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, 2^{k+1}$.
   (b) En déduire la valeur de S_n.
5. *(Par une dérivée)* Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} x^k \end{array}.$$
   En calculant de deux façons la dérivée de f, retrouver la valeur de S_n.
6. *(Par une autre méthode dont je ne donnerai pas le nom...)*
   (a) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$(k+1)\, 2^{k+1} - k2^k = k2^k + 2^{k+1}.$$
   (b) Retrouver alors la valeur de S_n.
7. *(Par une somme double)*
   (a) Sans utiliser les questions précédentes, montrer que
$$\sum_{1\leqslant p\leqslant k\leqslant n} 2^k = S_n.$$
   (b) Retrouver alors la valeur de S_n.
   (c) Calculer la somme double (triangulaire stricte) :
$$\sum_{1\leqslant p<k\leqslant n} \binom{n}{p} 2^k.$$
8. *(Une conséquence)* A l'aide d'une inversion d'indice et de la valeur de S_n (déterminée dans l'une des questions précédentes), calculer
$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}.$$

Problème 4 - Fonctions usuelles

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arccos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right). \end{array}$$

Partie 1 : Etude de f

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la parité de f.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
4. Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de dérivabilité de f.
5. Montrer que $\forall x \in \mathcal{D}$, $\quad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{\mathrm{ch}(x)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$
6. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
7. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{ch}(x) = 2$.
   (b) En déduire $f^{\leftarrow}\left(\left\{\frac{\pi}{3}\right\}\right)$.
   (c) Préciser $f^{\leftarrow}\left(\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Partie 2 : Construction d'une réciproque

8. Soit g la restriction de f à $\mathbb{R}_+$. Justifier que g définie une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un ensemble $J = [\alpha; \beta[$ que l'on déterminera. On note φ la réciproque de g.
9. (a) Vérifier que $\forall x > 0$, $f'(x) = \cos(f(x))$.
   (b) Justifier que φ est bien dérivable sur $]\alpha; \beta[$ puis montrer que $\forall x \in]\alpha; \beta[$, $\varphi'(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.
10. Justifier que la fonction $h : x \mapsto \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)$ est bien définie sur J.
11. Déduire des questions précédentes que pour tout $x \in J$, $\varphi(x) = \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)$.

Partie 3 : Une équation

On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{(E)} \qquad f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right) + \arccos\left(\frac{8}{5\,\mathrm{ch}(x)}\right).$$

On considère également l'équation suivante d'inconnue $y \in \mathbb{R}$,

$$\text{(F)} \qquad \arccos(y) - \arcsin(y) = \arccos\left(\frac{8y}{5}\right).$$

12. Déterminer $\mathcal{D}_F$ l'ensemble de définition de l'équation (F).
13. Soit $y \in \mathcal{D}_F$. Montrer que *si* y est une solution de (F) *alors*,
$$2y\left(\sqrt{1-y^2} - \frac{4}{5}\right) = 0.$$
14. On admet que (F) admet exactement trois solutions. Les déterminer proprement.
15. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

FIN