Commentaires du DS2
Trigonométrie, complexes, calcul algébrique, fonctions usuelles

Index des raccourcis :

- TB : très bien
- AE : à encadrer
- NJ : non justifié
- PC : pas clair
- Pq ? : pourquoi ?
- D ? : Dérivabilité ?
- H ? : Hypothèse(s) ?
- Q ... ? : Qu'est ... ? Variable non définie.
- Br : Brouillon
- A : alignes tes égalités/équivalences

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{80}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1	P2	P3	P4.1	P4.2	P4.3	P4	Total	Note finale
Moyenne	-2,2	5,8	4,8	9,4	9,5	3,4	0,7	13,6	31,4	9,24
Sur		15	25	30	20	12	8	40	110	80

TOTAL : 110 pt

Problème I - Trigonométrie 15 pt

1. (a) **3 pt** Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. *On pourra observer que* $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \ldots$
Bien, la question a été réussie par pratiquement tout le monde.

   (b) **2 pt** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation suivante d'inconnu $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos(\theta) + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin(\theta) = 2.$$

Correct dans l'ensemble. Certains utilisent la formule de linéarisation de $\cos(a)\cos(b)$ d'une part et de $\sin(a)\sin(b)$ cela marche mais est un chouille plus long, il faut reconnaitre directement la formule de $\cos(a+b)$. Plusieurs erreurs malgré tout de ci de là.

   (c) **1 pt** Représenter sur le cercle les solutions qui sont entre $-\pi$ et π.
Question facile, plutôt réussie lorsque la question précédente l'a été mais au total finalement pas tant que cela de bonnes réponses.

2. (a) **2 pt** Résoudre l'inéquation suivante d'inconnu $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\pi x) > \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Pas de difficulté mais pas énormément de bonnes réponses, moins d'une moitié de classe seulement. Il faut davantage s'exercer sur les exercices en autonomie !

(b) **1 pt** Représenter sur le cercle les solutions qui sont entre $-\pi$ et π.
Pas de difficulté non plus mais là aussi peu de bonnes réponses au final.

3. **2 pt** Résoudre l'équation suivante d'inconnu $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x)\tan(x) + 2\cos(x) = 2.$$

Attention à ne pas prendre x dans $\mathbb{R}$ mais bien dans $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

4. (a) **2 pt** Soit $\theta \in \mathbb{R}$, linéariser $16\cos(\theta)\sin^4(\theta)$.
Un peu calculatoire mais sinon exactement comme dans les exercices d'entrainement. Bien trop peu de bonnes réponses. Certains ont été troublés par le fait que la réponse n'est pas exactement la même que l'équation d'en dessous. C'est compréhensible mais dommage.

(b) **2 pt** Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation suivante d'inconnu $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\theta) - 3\cos(3\theta) + \cos(5\theta) = 0.$$

Très peu de réponses correctes.

Problème II - Complexes 25 pt

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & \frac{1}{\overline{z}+i} \end{array}$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble de définition de f.

1. **3 pt** Déterminer $\mathcal{D}$ et justifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{C}^*$.
Facile pour $\mathcal{D}$, attention à bien le rédiger. Beaucoup ne justifient pas l'espace d'arrivée comme demandé, c'est dommage cela faisait un point très facile.

2. (a) **3 pt** Déterminer $f^{\leftarrow}(\mathbb{R}^*)$.
Trop de cafouillages alors que là aussi, le démarrage du moins, est classique comme dans nos exercices. La conclusion est un peu plus dure, quelques bonnes réponses. N'oubliez pas d'enlever i à votre ensemble de solution à la fin.

(b) **2 pt** Déterminer $f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$.
Idem sauf que la conclusion est plus facile. Très peu de bonnes réponses malheureusement.

(c) **2 pt** Représenter $f^{\leftarrow}(\mathbb{R}^*)$ et $f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$ dans le plan.
Vous devez faire apparaitre le fait que i est exclut de la droite $f^{\leftarrow}(\mathbb{R}^*)$.

3. (a) **2 pt** Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Donner la forme algébrique de $f(ix)$.
Facile mais de nombreuses erreurs de calcul ! Le conjugué de $i(1-x)$ n'est pas $-i(1+x)$ puisque x est réel ! ! Inutile également de multiplier le dénominateur par $-i(1-x)$. La fraction $\frac{1}{i(1-x)}$ se simplifiait directement en multipliant pas $-i$.

(b) **2 pt** En déduire que $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\}) \subset i\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Plusieurs réponses intéressantes avec de bons éléments, la rédaction quant à elle n'est pas évidente, regardez bien le corrigé.

(c) **3 pt** Montrer également que $i\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset f\left(i\mathbb{R} \setminus \{i\}\right)$.
Idem en plus compliqué encore. Une ou deux réponses justes.

(d) **2 pt** Conclusion ? Donner une représentation graphique de $f\left(i\mathbb{R} \setminus \{i\}\right)$.
Beaucoup plus facile mais malheureusement pratiquement pas traitée !

4. (a) **2 pt** Montrer que f est injective sur $\mathcal{D}$.
Facile mais là aussi peu de réponses.

(b) **2 pt** Montrer que f est surjective sur $\mathbb{C}^*$.
Une petite poignée de bonnes réponses.

(c) **2 pt** Que peut-on en déduire ?
Facile ! Quelques-uns pensent bien à la faire en admettant les précédentes. Attention à bien spécifier correctement les ensembles de départ et d'arrivée, j'ai vu plusieurs confusions ici.

Problème III - Calcul algébrique 30 pt

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} k^\alpha 2^{a_k},$$

avec $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

1. **3 pt** On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 0$. Préciser S_n pour $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

   Bien dans l'ensemble. Attention $\sum_{k=0}^{n} 1 \neq n$. J'ai quand même croisée deux trois horreurs.

2. **2 pt** On suppose que $\alpha = 0$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$. Calculer S_n.

   Bien aussi, rédigez bien que vous reconnaissez une somme géométrique.

On suppose dans toute la suite que

$$\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ a_k = k.$$

On propose ni une ni deux ni trois mais quatre méthodes pour calculer S_n !

3. **2 pt** Calculer S_1 et S_2.

   Correct, dommage que ce n'ait pas été réussi par tout le monde car la question est incontournable sinon c'est que vous ne comprenez ce que veut dire une somme.

4. *(Par un changement d'indice)*

   (a) **2 pt** Montrer que $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, 2^{k+1}$.

   Un tiers de bonnes réponses. Beaucoup de changement d'indice très confus où l'on confond le vieil indice avec le nouveau. La disparition du terme d'ordre $k = -1$ doit être correctement écrite.

   (b) **2 pt** En déduire la valeur de S_n.

   Un nombre satisfaisant de bonnes réponses ici.

5. **4 pt** *(Par une dérivée)* Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} x^k \end{array}.$$

   En calculant de deux façons la dérivée de f, retrouver la valeur de S_n.

   Question plus dure, plus longue, demandant plus d'autonomie. Quelques points pour les calculs des dérivées. Deux/trois belles réponses.

6. *(Par une autre méthode dont je ne donnerai pas le nom...)*

   (a) **2 pt** Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(k+1)\, 2^{k+1} - k2^k = k2^k + 2^{k+1}.$$

   La rédaction par équivalent n'est pas la plus élégante. On part du membre de gauche et on simplifie plutôt. Un bon nombre de bonnes réponses.

   (b) **2 pt** Retrouver alors la valeur de S_n.

   Plusieurs recommencent plus ou moins la question 4. Il fallait ici reconnaitre une somme télescopique. Une ou deux bonnes réponses seulement.

7. *(Par une somme double)*

   (a) **2 pt** Sans utiliser les questions précédentes, montrer que

$$\sum_{1\leqslant p\leqslant k\leqslant n} 2^k = S_n.$$

   Pas très difficile mais vous êtes bien peu nombreux à avoir compris comment on calculait une somme double, c'est dommage car il y avait pas mal de points à prendre finalement sur ces dernières questions sans qu'elles soient pour autant trop difficiles.

   (b) **3 pt** Retrouver alors la valeur de S_n.
   Peu de bonnes réponses.

   (c) **3 pt** Calculer la somme double (triangulaire stricte) :

$$\sum_{1\leqslant p<k\leqslant n} \binom{n}{p} 2^k.$$

   Idem, surtout à cause de l'écriture de la somme double malheureusement.

8. **3 pt** *(Une conséquence)* A l'aide d'une inversion d'indice et de la valeur de S_n (déterminée dans l'une des questions précédentes), calculer

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}.$$

   Peu traitée ou réussie.

Problème IV - Fonctions usuelles 40 pt

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arccos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right). \end{array}$$

Partie 1 : Etude de f 20 pt

1. **2 pt** Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   Question plutôt facile lorsque l'on connait son cours et notamment : le domaine de définition de arccos et le minimum global de ch, ce qui n'est pas le cas de tout le monde. D'autre part, la rédaction n'est pas toujours très solide.

2. **2 pt** Etudier la parité de f.
   Mieux, globalement bien réussie.

3. **3 pt** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   Idem, bien souvent réussie. Quelques réponses trop rapides. Vous voyez presque tous l'usage de la parité pour la limite en $-\infty$.

4. **2 pt** Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de dérivabilité de f.
   Moins bien traitée. Cela nécessite une petite rédaction et surtout d'avoir réussie la question 1 pour aller plus loin.

5. **3 pt** Montrer que $\forall x \in \mathcal{D}, \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\text{ch}(x)} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{\text{ch}(x)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

   Peu traitée mais plusieurs belles réponses. A retravailler pour les autres.

6. **2 pt** En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

   Facile, bien réussie. Attention à la rédiger un minimum.

7. (a) **2 pt** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\text{ch}(x) = 2$.

   Peu traitée alors que la question était une question faite en TD !

   (b) **2 pt** En déduire $f^{\leftarrow}\left(\left\{\frac{\pi}{3}\right\}\right)$.

   Réussie par plusieurs d'entre vous, il fallait naturellement avoir réussie la question précédente.

   (c) **2 pt** Préciser $f^{\leftarrow}\left(\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

   Idem.

Partie 2 : Construction d'une réciproque **12 pt**

8. **2 pt** Soit g la restriction de f à $\mathbb{R}_+$. Justifier que g définie une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un ensemble $J = [\alpha; \beta[$ que l'on déterminera. On note φ la réciproque de g.

   Correct dans l'ensemble même si l'ensemble J n'est pas toujours bon lorsque vous vous êtes trompés dans le tableau de variation précédent.

9. (a) **2 pt** Vérifier que $\forall x > 0$, $f'(x) = \cos(f(x))$.

   Bien réussie.

   (b) **3 pt** Justifier que φ est bien dérivable sur $]\alpha; \beta[$ puis montrer que $\forall x \in]\alpha; \beta[$, $\varphi'(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

   Moins réussie sur l'énoncé du théorème malheureusement, les hypothèses ne sont pas toujours bonnes. Peu de réponses pour le calcul de φ' ou alors ce n'est pas complètement clair.

10. **2 pt** Justifier que la fonction $h : x \mapsto \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)$ est bien définie sur J.

    Question plutôt facile mais peu traitée. Certains ont tenté de déterminer l'ensemble de définition de h ce qui est long et laborieux, il suffisait juste de vérifier que pour $x \in J$, $h(x)$ existait bien.

11. **3 pt** Déduire des questions précédentes que pour tout $x \in J$, $\varphi(x) = \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)$.

    Une poignée de belles réponses.

Partie 3 : Une équation **8 pt**

On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{(E)} \qquad f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right) + \arccos\left(\frac{8}{5\,\text{ch}(x)}\right).$$

On considère également l'équation suivante d'inconnue $y \in \mathbb{R}$,

$$\text{(F)} \qquad \arccos(y) - \arcsin(y) = \arccos\left(\frac{8y}{5}\right).$$

12. **2 pt** Déterminer $\mathcal{D}_F$ l'ensemble de définition de l'équation (F).

    Assez peu traitée, question plutôt facile et réussie lorsqu'elle est abordée.

13. **2 pt** Soit $y \in \mathcal{D}_F$. Montrer que *si* y est une solution de (F) *alors*,

$$2y\left(\sqrt{1-y^2} - \frac{4}{5}\right) = 0.$$

    L'énoncé guidait un peu ici. Quelques bonnes réponses mais peu de tentatives.

14. **2 pt** On admet que (F) admet exactement trois solutions. Les déterminer proprement.
Bien faire une phrase sur la synthèse pour dire que les 3 candidats obtenus sont alors bien solutions.

15. **2 pt** Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
Peu traitée, une ou deux bonnes réponses.

FIN