Corrigé du Devoir Surveillé 2
Trigonométrie, complexes, calcul algébrique, fonctions usuelles

Problème I - Trigonométrie

1. (a) On remarque que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

NB : on pouvait aussi calculer le sinus à partir du cosinus par la relation $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1$.
Conclusion,

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.}$$

(b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On passe par « la forme polaire ». On a les équivalences suivantes :

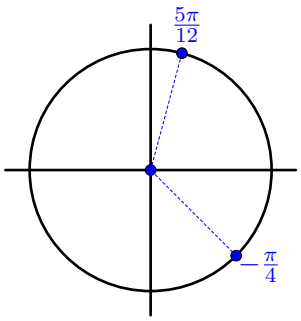
$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos(\theta) + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin(\theta) = 2\\ \Leftrightarrow\quad &\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cos(\theta) + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\sin(\theta) = \frac{1}{2}\\ \Leftrightarrow\quad &\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos(\theta) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin(\theta) = \frac{1}{2} \qquad \text{d'après la question précédente}\\ \Leftrightarrow\quad &\cos\left(\theta - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\\ \Leftrightarrow\quad &\theta - \frac{\pi}{12} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \qquad \text{OU} \qquad \theta - \frac{\pi}{12} \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\\ \Leftrightarrow\quad &\theta \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi] \qquad \text{OU} \qquad \theta \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

(c) Entre $-\pi$ et π, on obtient,

$$\boxed{\mathscr{S} \cap [-\pi;\pi] = \left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{12}\right\}.}$$



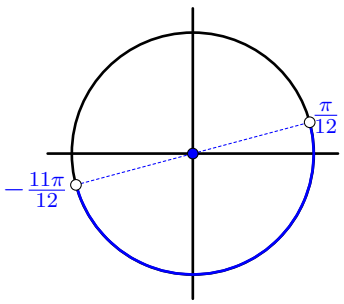
2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(x) > \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) &\Leftrightarrow \cos(x) - \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) > 0 \\
&\Leftrightarrow -2\sin\left(\frac{x + x - \frac{\pi}{6}}{2}\right)\sin\left(\frac{x - x + \frac{\pi}{6}}{2}\right) > 0 \\
&\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) < 0 \qquad \text{car -2} < 0 \\
&\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) < 0 \qquad \text{car } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0 \text{ car } \frac{\pi}{12} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad (2k-1)\pi < x - \frac{\pi}{12} < 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{11\pi}{12} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{12} + 2k\pi.
\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\cos(x) > \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{11\pi}{12} + 2k\pi; \frac{\pi}{12} + 2k\pi\right[.}$$

(b) Entre $-\pi$ et π, on obtient $\boxed{\left]-\frac{11\pi}{12}; \frac{\pi}{12}\right[}$



3. Soient $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $x \in \mathscr{D}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\sin(x)\tan(x) + 2\cos(x) = 2 &\Leftrightarrow \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} + 2\cos(x) = 2 \\
&\Leftrightarrow \sin^2(x) + 2\cos^2(x) = 2\cos(x) \quad \text{car } \cos(x) \neq 0 \text{ car } x \in \mathscr{D} \\
&\Leftrightarrow 1 - \cos^2(x) + 2\cos^2(x) = 2\cos(x) \\
&\Leftrightarrow \cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\cos(x) - 1)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow x \equiv 0 \ [2\pi].
\end{aligned}$$

On remarque que $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathscr{D}$. Conclusion, pour tout $x \in \mathscr{D}$,

$$\boxed{\sin(x)\tan(x) + 2\cos(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.}$$

4. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
16\cos(\theta)\sin^4(\theta) &= 16\cos(\theta)\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)^2 \\
&= 4\cos(\theta)\left(1 - 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)\right) \\
&= 4\cos(\theta)\left(1 - 2\cos(2\theta) + \frac{1+\cos(4\theta)}{2}\right) \\
&= 2\cos(\theta)\left(2 - 4\cos(2\theta) + 1 + \cos(4\theta)\right) \\
&= 6\cos(\theta) - 8\cos(\theta)\cos(2\theta) + 2\cos(\theta)\cos(4\theta) \\
&= 6\cos(\theta) - 4\left(\cos(3\theta) + \cos(\theta)\right) + \cos(5\theta) + \cos(3\theta) \\
&= \cos(5\theta) - 3\cos(3\theta) + 2\cos(\theta).
\end{aligned}$$

NB : on peut vérifier son résultat avec $\theta = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{4}$.
Conclusion, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{16\cos(\theta)\sin^4(\theta) = \cos(5\theta) - 3\cos(3\theta) + 2\cos(\theta).}$$

(b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
& \cos(\theta) - 3\cos(3\theta) + \cos(5\theta) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 2\cos(\theta) - 3\cos(3\theta) + \cos(5\theta) = \cos(\theta) \\
\Leftrightarrow \quad & 16\cos(\theta)\sin^4(\theta) = \cos(\theta) \\
\Leftrightarrow \quad & \cos(\theta) = 0 \quad \text{OU} \quad 16\sin^4(\theta) = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \quad \text{OU} \quad \sin^4(\theta) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \quad \text{OU} \quad \sin^2(\theta) = \frac{1}{4} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \text{OU} \quad \sin^2(\theta) = -\frac{1}{4} \text{ (impossible car } \sin^2(\theta) \geqslant 0) \\
\Leftrightarrow \quad & \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \quad \text{OU} \quad \sin^2(\theta) = \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow \quad & \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \quad \text{OU} \quad \sin(\theta) = \frac{1}{2} \quad \text{OU} \quad \sin(\theta) = -\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \quad \text{OU} \quad \theta \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \quad \text{OU} \quad \theta \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi] \\
& \qquad\qquad \text{OU} \quad \theta \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi] \quad \text{OU} \quad \theta \equiv -\frac{5\pi}{6}\ [2\pi] \\
\Leftrightarrow \quad & \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \quad \text{OU} \quad \theta \equiv \frac{\pi}{6}\ [\pi] \quad \text{OU} \quad \theta \equiv -\frac{\pi}{6}\ [\pi]
\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
& \cos(\theta) - 3\cos(3\theta) + \cos(5\theta) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \theta \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}.
\end{aligned}$$

Problème II - Complexes

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & \frac{1}{\overline{z}+i}, \end{array}$ où $\mathcal{D}$ est l'ensemble de définition de f.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$z \in \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z} + i \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z} \neq -i \quad \Leftrightarrow \quad z \neq i.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{i\}\,.}$$

On observe alors bien que pour tout $z \in \mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on a $\frac{1}{\overline{z}+i} \neq 0$ et donc

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}\,, \qquad f(z) \in \mathbb{C}^*.}$$

2. (a) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a les équivalences suivantes

$$\begin{array}{lll} f^{\leftarrow}(\mathbb{R}^*) & \Leftrightarrow & f(z) \in \mathbb{R}^* \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{\overline{z}+i} \in \mathbb{R}^* \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{\overline{z}+i} = \overline{\left(\dfrac{1}{\overline{z}+i}\right)} \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{\overline{z}+i} = \dfrac{1}{z-i} \\ & \Leftrightarrow & \overline{z}+i = z-i \qquad \text{car } z \neq i \\ & \Leftrightarrow & z - \overline{z} = 2i \\ & \Leftrightarrow & 2i\mathrm{Im}\,(z) = 2i \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{Im}\,(z) = 1. \end{array}$$

Attention à bien ôter i de l'ensemble final. On obtient donc la droite horizontale suivante privée d'un point :

$$\boxed{f^{\leftarrow}(\mathbb{R}^*) = \{\, a + i \mid a \in \mathbb{R}^* \,\}\,.}$$

(b) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lllll} z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) & \Leftrightarrow & f(z) \in \mathbb{U} & \Leftrightarrow & f(z)\,\overline{f(z)} = 1 \\ & & & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{\overline{z}+i} \times \dfrac{1}{z-i} = 1 \\ & & & \Leftrightarrow & (\overline{z}+i)(z-i) = 1 \qquad \text{car } z \neq i \\ & & & \Leftrightarrow & |z|^2 - i\overline{z} + iz + 1 = 1 \\ & & & \Leftrightarrow & |z|^2 + i(z - \overline{z}) = 0 \\ & & & \Leftrightarrow & |z|^2 - 2\mathrm{Im}\,(z) = 0. \end{array}$$

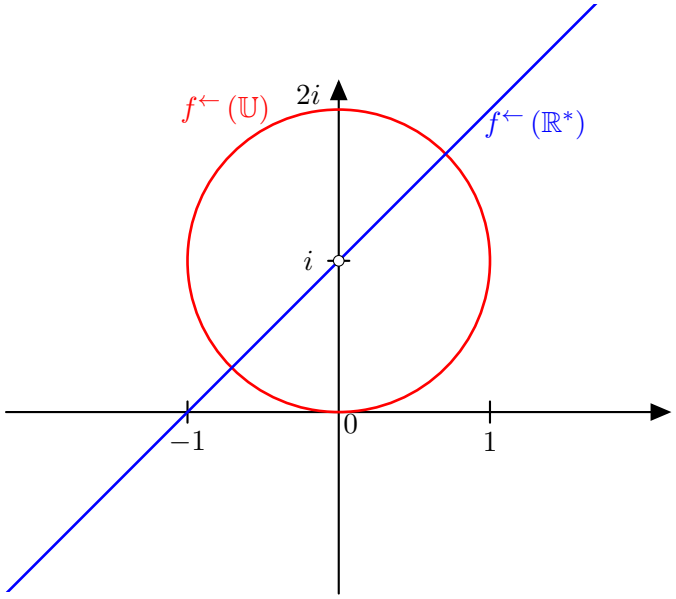
Posons $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$\begin{array}{lllll} z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) & \Leftrightarrow & a^2 + b^2 - 2b = 0 & \Leftrightarrow & a^2 + (b-1)^2 - 1 = 0 \\ & & & \Leftrightarrow & a^2 + (b-1)^2 = 1. \end{array}$$

On note que i n'est pas solution de cette dernière équation (c'est le centre du cercle). On en déduit que l'ensemble solution est le cercle de centre i et de rayon 1. Conclusion :

$$\boxed{f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = 1 \,\}\,.}$$

(c) On obtient :



3. (a) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors $ix \neq i$ et donc $ix \in \mathcal{D}$. De plus, on a les égalités suivantes :

$$f(ix) = \frac{1}{\overline{ix} + i} = \frac{1}{-ix + i} = \frac{1}{i(1-x)} = \frac{-i}{1-x} = \frac{i}{x-1}.$$

Conclusion, on a

$$\boxed{f(ix) = \frac{i}{x-1}.}$$

(b) Soit $z' \in f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$. Par définition, il existe $z \in i\mathbb{R} \setminus \{i\}$ tel que $z' = f(z)$. De plus puisque $z \in i\mathbb{R} \setminus \{i\}$, il existe $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $z = ix$. Donc, d'après la question précédente,

$$z' = f(z) = f(ix) = \frac{i}{x-1}.$$

Or $\frac{1}{x-1} \in \mathbb{R}^*$, donc $z' \in i\mathbb{R}i \setminus \{0\}$. Ceci étant vrai pour tout $z' \in f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$, on conclut que

$$\boxed{f(i\mathbb{R} \setminus \{i\}) \subset i\mathbb{R} \setminus \{0\}.}$$

(c) Soit $z' \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors il existe $y \in \mathbb{R}^*$ tel que $z' = iy$. Posons $x = \frac{1+y}{y}$ qui est bien défini car $y \neq 0$ puis $z = ix$. Montrons que $x \neq 1$. Procédons par l'absurde. Supposons que $x = 1$. Alors $\frac{1+y}{y} = 1$ i.e. $1 + y = y$ ou encore $1 = 0$ ce qui est impossible. Donc $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On note alors par la question (a) que

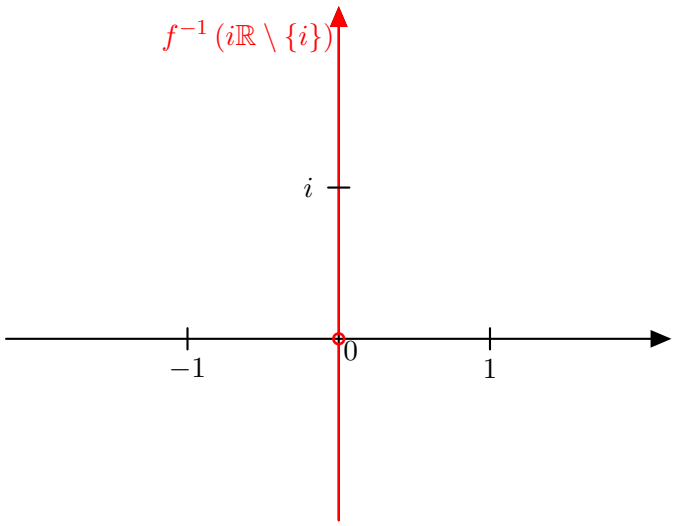
$$f(z) = f(ix) = \frac{i}{x-1} = \frac{i}{\frac{1+y}{y} - 1} = \frac{iy}{1+y-y} = iy = z'.$$

Donc $z' = f(z)$ avec $z = ix$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Donc $z \in i\mathbb{R} \setminus \{i\}$ et par suite, $z' \in f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$. Ceci étant vrai pour tout $z' \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$, on conclut que

$$\boxed{i\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset f(i\mathbb{R} \setminus \{i\}).}$$

(d) Par les questions (b) et (c), on a montré une double inclusion et donc on conclut que

$$\boxed{f(i\mathbb{R} \setminus \{i\}) = i\mathbb{R} \setminus \{0\}.}$$



4. (a) Soient $(z,z')\in\mathcal{D}^2=(\mathbb{C}\setminus\{i\})^2$ tel que $f(z)=f(z')$. Alors, on a les implications suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\overline{z}+i}=\frac{1}{\overline{z'}+i} &\Rightarrow \overline{z}+i=\overline{z'}+i\\ &\Rightarrow \overline{z}=\overline{z'}\\ &\Rightarrow z=z'.\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{f \text{ est injective sur } \mathcal{D}}$.

(b) Soit $z'\in\mathbb{C}^*$. Montrons que z' est l'image d'un complexe par f. On procède par analyse-synthèse.
Analyse. Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$ tel que $z'=f(z)$. On a les implications suivantes :

$$\begin{aligned}z'=f(z) &\Rightarrow z'=\frac{1}{\overline{z}+i}\\ &\Rightarrow \frac{1}{z'}=\overline{z}+i \qquad \text{car } z'\neq 0\\ &\Rightarrow \overline{z}=\frac{1}{z'}-i\\ &\Rightarrow \overline{z}=\frac{1-iz'}{z'}\\ &\Rightarrow z=\frac{1+i\overline{z'}}{\overline{z'}}.\end{aligned}$$

On aurait donc un candidat solution à notre problème.
Synthèse. On pose $z=\frac{1+i\overline{z'}}{\overline{z'}}$ qui est bien défini car $z'\neq 0$. De plus $z\neq i$. En effet par l'absurde, si $z=i$ alors $1+i\overline{z'}=i\overline{z'}$ et donc $1=0$ ce qui est absurde. Donc $z\in\mathcal{D}$. De plus on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}f(z)=\frac{1}{\overline{z}+i}=\frac{1}{\left(\frac{1+i\overline{z'}}{\overline{z'}}\right)+i}=\frac{1}{\frac{1-iz'}{z'}+i}=\frac{z'}{1-iz'+iz'} \qquad \text{car } z'\neq 0\\ =z'.\end{aligned}$$

En posant un tel z, on a donc déterminer un antécédent de $z'\in\mathscr{D}_f$ par f. Donc $z'\in f(\mathbb{C}\setminus\{i\})$. Ceci étant vrai pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, on conclut que $\boxed{f \text{ est surjective sur } \mathbb{C}^*}$.

(c) Par les questions précédentes, f est injective sur $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ et surjective sur $\mathbb{C}^*$.

Conclusion, f définit une bijection de $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ dans $\mathbb{C}^*$.

Mieux ! Par la question précédente, on a même f^{-1} : $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C}\setminus\{i\} \\ z' & \mapsto & \frac{1+i\overline{z'}}{\overline{z'}} \end{array}$ *, trop classe !*

Problème III - Calcul algébrique

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} k^\alpha 2^{a_k},$$

avec $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 0$. Alors, on obtient

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^\alpha 2^0 = \sum_{k=0}^{n} k^\alpha.$$

Si $\alpha = 0$, alors on obtient la somme d'une constante,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^0 = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$$

De même, si $\alpha = 1$, on obtient la somme des premiers entiers :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Si $\alpha = 2$, on obtient la somme des carrés des premiers entiers :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \begin{cases} n+1 & \text{si } \alpha = 0 \\ \frac{n(n+1)}{2} & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \text{si } \alpha = 2. \end{cases}}$$

2. On suppose que $\alpha = 0$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$. Par définition, on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^0 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k.$$

On reconnaît une somme géométrique de raison $2 \neq 1$. Donc

$$S_n = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1} - 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = 2^{n+1} - 1.}$$

On suppose dans toute la suite que

$$\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ a_k = k.$$

On propose ni une ni deux ni trois mais quatre méthodes pour calculer S_n !

3. On a par définition,
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k.$$
Donc
$$S_1 = \sum_{k=0}^{1} k2^k = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 = 2 \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{2} k2^k = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 = 2 + 8 = 10.$$
Conclusion,
$$\boxed{S_1 = 2 \text{ et } S_2 = 10.}$$

4. *(Par un changement d'indice)*

   (a) Par définition, on a
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n} k2^k + 0 \times 2^0 = \sum_{k=1}^{n} k2^k \qquad \text{car } n \geqslant 1.$$
   Posons $\tilde{k} = k - 1$ i.e. $k = \tilde{k} + 1$. Alors,
   $$S_n = \sum_{\tilde{k}=0}^{n-1} \left(\tilde{k} + 1\right) 2^{\tilde{k}+1}.$$
   L'indice de sommation étant muet, on conclut
   $$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, 2^{k+1}.}$$

   (b) Par la question précédente, on a les égalités entre réels suivantes :
   $$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} k2^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k2^{k+1} - n2^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} \\ &= 2\sum_{k=0}^{n} k2^k - n2^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} \\ &= 2S_n - n2^{n+1} + 2\sum_{k=0}^{n-1} 2^k. \end{aligned}$$
   On reconnaît une somme géométrique de raison $2 \neq 1$,
   $$S_n = 2S_n - n2^{n+1} + 2\frac{2^{n-1+1} - 1}{2 - 1} = 2S_n - n2^{n+1} + 2\left(2^n - 1\right).$$
   Dès lors, on en déduit que
   $$S_n = n2^{n+1} - 2\left(2^n - 1\right) = n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 = (n-1)\, 2^{n+1} + 2.$$
   Conclusion,
   $$\boxed{S_n = (n-1)\, 2^{n+1} + 2.}$$
   On vérifie son résultat. Si $n = 1$, on a $S_1 = (1-1)\, 2^{1+1} + 2 = 2$ ce qui est cohérent avec la question 3. De même, $S_2 = (2-1)\, 2^{2+1} + 2 = 8 + 2 = 10$ OK !

5. *(Par une dérivée)* Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k \end{array}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fonction polynomiale et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = 0 + \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}.$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on reconnaît une somme géométrique. Donc

$$f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Cette expression est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \qquad f'(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) - \left(1 - x^{n+1}\right)(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

En particulier, pour $x = 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k 2^{k-1} &= \frac{n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1}{(1-2)^2} \\ &= n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1 \\ &= 2^n(2n - n - 1) + 1 \\ &= 2^n(n-1) + 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k 2^k = 0 + \sum_{k=1}^{n} k 2^k = 2\sum_{k=1}^{n} k 2^{k-1} = 2\left[2^n(n-1) + 1\right] = 2^{n+1}(n-1) + 2.$$

Conclusion, on retrouve bien l'expression de la question 4.b

$$\boxed{S_n = 2^{n+1}(n-1) + 2.}$$

6. *(Par une autre méthode dont je ne donnerai pas le nom...)*

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$(k+1)2^{k+1} - k2^k = (2k+2)2^k - k2^k = (2k+2-k)2^k = (k+2)2^k = k2^k + 2^{k+1}.$$

Conclusion, on trouve bien que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad (k+1)2^{k+1} - k2^k = k2^k + 2^{k+1}.}$$

(b) En sommant la relation précédente entre 0 et n, on a

$$\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)\,2^{k+1}-k2^k\right]=\sum_{k=0}^{n}\left[k2^k+2^{k+1}\right]$$

On reconnaît une somme télescopique dans le terme de gauche donc

$$\begin{aligned}
&(n+1)\,2^{n+1}-0\times 2^0=\sum_{k=0}^{n}\left[k2^k+2^{k+1}\right]\\
\Leftrightarrow\quad &(n+1)\,2^{n+1}=\sum_{k=0}^{n}k2^k+\sum_{k=0}^{n}2^{k+1}\\
\Leftrightarrow\quad &(n+1)\,2^{n+1}=S_n+2\sum_{k=0}^{n}2^k.
\end{aligned}$$

En reconnaissant une somme géométrique de raison $2\neq 1$, on obtient que

$$\begin{aligned}
S_n&=(n+1)\,2^{n+1}-2\sum_{k=0}^{n}2^k\\
&=(n+1)\,2^{n+1}-2\times\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\\
&=(n+1)\,2^{n+1}-2\left(2^{n+1}-1\right)\\
&=(n+1)\,2^{n+1}-2^{n+2}+2\\
&=(n+1-2)\,2^{n+1}+2\\
&=(n-1)\,2^{n+1}+2.
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve une fois encore,

$$\boxed{S_n=(n-1)\,2^{n+1}+2.}$$

7. *(Par une somme double)*

(a) En sommant en interne sur p et en externe sur k, on a

$$\sum_{1\leqslant p\leqslant k\leqslant n}2^k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k}2^k.$$

L'entier 2^k ne dépendant pas de p :

$$\sum_{1\leqslant p\leqslant k\leqslant n}2^k=\sum_{k=1}^{n}2^k\sum_{p=1}^{k}1=\sum_{k=1}^{n}2^k\times k=S_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{1\leqslant p\leqslant k\leqslant n}2^k=S_n.}$$

(b) En échangeant l'ordre de sommation i.e. en sommant en interne sur k et en externe sur p, on a

$$S_n=\sum_{1\leqslant p\leqslant k\leqslant n}2^k=\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=p}^{n}2^k.$$

On reconnaît une somme géométrique de raison $q = 2 \neq 1$. On a donc

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{p=1}^{n} 2^p \frac{2^{n-p+1}-1}{2-1} \\ &= \sum_{p=1}^{n} \left(2^{n+1} - 2^p\right) \\ &= n2^{n+1} - 2\frac{2^n-1}{2-1} \\ &= n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 \\ &= (n-1)\,2^{n+1} + 2. \end{aligned}$$

Conclusion, on obtient une fois encore,

$$\boxed{S_n = (n-1)\,2^{n+1} + 2.}$$

(c) On procède comme dans la question précédente, on a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{1\leqslant p<k\leqslant n} \binom{n}{p} 2^k &= \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{k=p+1}^{n} \binom{n}{p} 2^k \\ &= \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} \sum_{k=p+1}^{n} 2^k \\ &= \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} 2^{p+1} \frac{2^{n-p-1+1}-1}{2-1} \\ &= \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} \left(2^{n+1} - 2^{p+1}\right) \\ &= 2^{n+1} \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} - \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} 2^{p+1} \\ &= 2^{n+1} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} - 2^{n+1} - 2^{n+1} - \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^{p+1} + 2 + 2^{n+1}. \end{aligned}$$

On reconnaît alors deux binômes de Newton :

$$\begin{aligned} \sum_{1\leqslant p<k\leqslant n} \binom{n}{p} 2^k &= 2^{n+1}(1+1)^n - 2^{n+1} - 2(2+1)^n + 2 \\ &= 2^{2n+1} - 2^{n+1} - 2\times 3^n + 2. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{1\leqslant p<k\leqslant n} \binom{n}{p} 2^k = 2^{n+1}(2^n-1) - 2\times 3^n + 2.}$$

8. *(Une conséquence)* Par l'inversion d'indice $\tilde{k} = n - k$, on obtient que

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} \\
&= \sum_{\tilde{k}=0}^{n} \frac{n-k}{2^{n-k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{2^{n-k}} - \frac{k}{2^{n-k}} && \text{car l'indice est muet} \\
&= \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^{n} 2^k - \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} k2^k \\
&= \frac{n}{2^n} \frac{2^{n+1}-1}{2-1} - \frac{1}{2^n} S_n && \text{car on reconnaît une somme géométrique} \\
&= n\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2^n}\left((n-1)\,2^{n+1} + 2\right) && \text{par ce qui précède} \\
&= 2n - \frac{n}{2^n} - 2\,(n-1) - \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 2 - \frac{n+2}{2^n}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{T_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}.}$$

Problème IV - Fonctions usuelles

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arccos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right). \end{array}$$

Partie 1 : Etude de f

1. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1$. Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 0 < \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \leqslant 1.$$

La fonction arccos est définie sur $[-1;1]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \in]0;1] \subset [-1;1]$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

2. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$ qui est bien centré en 0. De plus par parité de la fonction ch, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(-x) = \arccos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\,(-x)}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\,(x)}\right) = f(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est paire.}}$$

3. On sait que $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et par continuité de la fonction arccos en 0, on a $\arccos(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$. Par composition, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \arccos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right) = \lim_{u\to 0} \arccos(u) = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.}$$

Or la fonction f est paire et donc son graphe est symétrique par rapport à l'axe (Oy). On en déduit donc directement que

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.}$$

4. Nous avons déjà vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\text{ch}(x)} \in]0;1]$. Or la fonction arccos n'est dérivable que sur $]-1;1[$. Par conséquent pour $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\text{ch}(x)} \in]-1;1[\quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\text{ch}(x)} \neq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \neq \text{ch}(x) \qquad\qquad \textit{car } \text{ch}(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}^*.}$$

5. Soit $x \in \mathcal{D}$. On a

$$f'(x) = \frac{-\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right)^2}} = \frac{\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)}}{\sqrt{\frac{\text{ch}^2(x)-1}{\text{ch}^2(x)}}} = \frac{\text{sh}(x)\sqrt{\text{ch}^2(x)}}{\text{ch}^2(x)\sqrt{\text{ch}^2(x)-1}}.$$

Or $\sqrt{\text{ch}^2(x)} = \text{ch}(x)$ car $\text{ch}(x) > 0$. De plus $\text{ch}^2(x) - 1 = \text{sh}^2(x)$. Ainsi,

$$f'(x) = \frac{\text{sh}(x)\,\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x)\sqrt{\text{sh}^2(x)}} = \frac{\text{sh}(x)}{\sqrt{\text{sh}^2(x)}}\frac{1}{\text{ch}(x)}$$

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\text{sh}(x) > 0$ et donc $\sqrt{\text{sh}^2(x)} = \text{sh}(x)$. Donc

$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{sh}(x)}\frac{1}{\text{ch}(x)} = \frac{1}{\text{ch}(x)}.$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $\text{sh}(x) < 0$ et donc

$$\forall x < 0, \qquad f'(x) = \frac{\text{sh}(x)}{-\text{sh}(x)}\frac{1}{\text{ch}(x)} = -\frac{1}{\text{ch}(x)}.$$

Notons que $\mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}^* = \mathcal{D}$, nous avons donc bien traité tous les cas. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D} = \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\text{ch}(x)} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{\text{ch}(x)} & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

6. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\text{ch}(x)} > 0$, on en déduit que pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$ et pour tout $x < 0$, $f'(x) < 0$. Ainsi la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et donc sur $\mathbb{R}_-$ par continuité (f est continue sur son domaine de définition comme composée de fonctions qui sont continues sur leurs domaines de définition) et de même f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (ce qui est cohérent avec sa parité). On sait par une question précédente que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Enfin, $f(0) = \arccos\left(\frac{1}{\text{ch}(0)}\right) = \arccos(1) = 0$. Conclusion, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

7. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = \mathrm{e}^x$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x) = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X + \frac{1}{X}}{2} = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad X^2 + 1 = 4X \qquad \textit{car } X > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad X^2 - 4X + 1 = 0. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé. On a $\Delta = 16 - 4 = 12$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x) = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad X = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3} \ \text{ OU } \ X = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x = 2 + \sqrt{3} \ \text{ OU } \ \mathrm{e}^x = 2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

On note que $2 + \sqrt{3} > 0$ et $2 - \sqrt{3} > 0$ (car $2 > \sqrt{3}$ car $4 > 3$). Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{ch}(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right) \ \text{ OU } \ x = \ln\left(2 - \sqrt{3}\right).}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in f^{\leftarrow}\left(\left\{\frac{\pi}{3}\right\}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in \left\{\frac{\pi}{3}\right\} \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad \arccos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right) = \frac{\pi}{3} = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{1}{2} \qquad \textit{par injectivité de la fonction } \arccos \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{ch}(x) = 2. \end{aligned}$$

Donc par la question précédente, on en déduit que

$$\boxed{f^{\leftarrow}\left(\left\{\frac{\pi}{3}\right\}\right) = \left\{\ln\left(2 + \sqrt{3}\right); \ln\left(2 - \sqrt{3}\right)\right\}.}$$

(c) Par la question précédente, on en complète le tableau de variation :

x	$-\infty$		$\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$		0		$\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$		$+\infty$
f	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{3}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

La fonction f étant continue et strictement monotone sur $]-\infty; 0]$ et sur $[0; +\infty[$, par application du théorème de la bijection, on en déduit que

$$\boxed{f^{\leftarrow}\left(\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]-\infty; \ln\left(2 - \sqrt{3}\right)\right] \cup \left[\ln\left(2 + \sqrt{3}\right); +\infty\right[.}$$

Partie 2 : Construction d'une réciproque

8. Soit g la restriction de f à $\mathbb{R}_+$. Par les questions précédentes, on sait que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Il en est donc de même de g. Donc par le théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ définit une bijection de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } J = g(\mathbb{R}_+) = f(\mathbb{R}_+) = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[}$$

On note φ la réciproque de g.

9. (a) Soit $x > 0$. Par la partie 1, on sait que f est dérivable en x et $f'(x) = \frac{1}{\text{ch}(x)}$. D'autre part, on a

$$\cos(f(x)) = \cos\left(\arccos\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right)\right) = \frac{1}{\text{ch}(x)}.$$

$\cos\arccos$ *ne pose pas de problème au contraire de* $\arccos\cos$*...*
Conclusion,

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad f'(x) = \cos(f(x)).}$$

(b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{\text{ch}(x)} > 0$. Donc il en est de même pour g notamment g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $g'(x) = f'(x) \neq 0$. Par le théorème de la dérivabilité de la fonction réciproque, on en déduit que φ est dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\varphi'(x) = \frac{1}{g'(\varphi(x))} = \frac{1}{f'(\varphi(x))}.$$

Or on a $g(]0; +\infty[) = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Donc $\varphi\left(\left]0; \frac{\pi}{2}\right[\right) =]0; +\infty[$. Autrement dit pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\varphi(x) > 0$. Donc par la question précédente,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f'(\varphi(x))} = \frac{1}{\cos(f(\varphi(x)))} = \frac{1}{\cos(x)},$$

car $\varphi(x) \geqslant 0$ et donc $f(\varphi(x)) = g(\varphi(x)) = x$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{\cos(x)}.}$$

10. Soit $x \in J = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $0 < \cos(x) \leqslant 1$ et $0 \leqslant \sin(x) < 1$. Par conséquent,

$$0 < 1 \leqslant \frac{1}{\cos(x)} \qquad \text{et} \qquad 1 \leqslant 1 + \sin(x) < 2.$$

Donc par produit,

$$\frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)} \geqslant 1 > 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } h : x \mapsto \ln\left(\frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)}\right) \text{ est bien définie sur } J = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[.}$$

11. La fonction h est bien définie sur J et est même dérivable sur J comme composée de fonctions dérivables sur leurs ensembles de définition. De plus pour tout $x \in J$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)'}{\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}} \\ &= \frac{\cos(x)\cos(x) - (1+\sin(x))(-\sin(x))}{\cos^2(x)} \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin(x) + \sin^2(x)}{\cos(x)(1+\sin(x))} \\ &= \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)(1+\sin(x))} \\ &= \frac{1}{\cos(x)}. \end{aligned}$$

Donc par la question 9.b, pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $h'(x) = \varphi'(x)$. Par conséquent,

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \varphi(x) = h(x) + C.$$

Or par le théorème de la bijection, on sait que φ est continue sur J et donc notamment en 0. De plus h est continue sur J comme composée de fonctions continues sur leurs ensembles de définition. Donc par passage à la limite quand $x \to 0$,

$$\varphi(0) = \lim_{x\to 0} \varphi(x) = \lim_{x\to 0} h(x) + C = h(0) + C.$$

Ainsi,

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall \left[0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \varphi(x) = h(x) + C.$$

Déterminons C. En évaluant en 0 par exemple. Puisque $g(0) = f(0) = 0$, on en déduit que $\varphi(0) = 0$ et donc

$$C = \varphi(0) - h(0) = 0 - \ln\left(\frac{1+\sin(0)}{\cos(0)}\right) = -\ln(1) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \varphi(x) = h(x) = \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right).}$$

Partie 3 : Une équation

On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right) + \arccos\left(\frac{8}{5\operatorname{ch}(x)}\right). \tag{E}$$

On considère également l'équation suivante d'inconnue $y \in \mathbb{R}$,

$$\arccos(y) - \arcsin(y) = \arccos\left(\frac{8y}{5}\right). \tag{F}$$

12. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{D}_F \qquad &\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \frac{8y}{5} \leqslant 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ -\frac{5}{8} \leqslant y \leqslant \frac{5}{8} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \qquad -\frac{5}{8} \leqslant y \leqslant \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D}_F = \left[-\frac{5}{8}; \frac{5}{8}\right].}$$

13. Soit $y \in \mathcal{D}_F$. Supposons que y soit une solution de (F). Alors

$$\arccos(y) - \arcsin(y) = \arccos\left(\frac{8y}{5}\right).$$

En composant par la fonction cosinus, on obtient,

$$\begin{aligned} & \cos(\arccos(y) - \arcsin(y)) = \cos\left(\arccos\left(\frac{8y}{5}\right)\right) = \frac{8y}{5} \\ \Leftrightarrow \quad & \cos(\arccos(y))\cos(\arcsin(y)) + \sin(\arccos(y))\sin(\arcsin(y)) = \frac{8y}{5} \\ \Leftrightarrow \quad & y\cos(\arcsin(y)) + y\sin(\arccos(y)) = \frac{8y}{5}. \end{aligned}$$

Or on sait que $\cos^2(\arcsin(y)) = 1 - \sin^2(\arcsin(y)) = 1 - y^2$. De plus, $\arcsin(y) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(\arcsin(y)) \geqslant 0$. Ainsi,

$$\cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2}.$$

De même, on a $\sin(\arccos(y)) = \sqrt{1-y^2}$. Donc

$$\begin{aligned} \text{(F)} \quad \Rightarrow \quad & y\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-y^2} = \frac{8y}{5} \\ \Leftrightarrow \quad & 2y\sqrt{1-y^2} = \frac{8y}{5} \\ \Leftrightarrow \quad & 2y\left(\sqrt{1-y^2} - \frac{4}{5}\right) = 0. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{y \text{ solution de (F)} \quad \Rightarrow \quad 2y\left(\sqrt{1-y^2} - \frac{4}{5}\right) = 0.}$$

14. On procède par analyse-synthèse. *Analyse.* Soit $y \in \mathcal{D}_F$. Supposons y solution de (F). Alors, par la question précédente, $2y\left(\sqrt{1-y^2} - \frac{4}{5}\right) = 0$. Donc $y = 0$ ou

$$\begin{aligned} \sqrt{1-y^2} - \frac{4}{5} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad & \sqrt{1-y^2} = \frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow \quad & 1 - y^2 = \frac{16}{25} \qquad \textit{car } 1 - y^2 \geqslant 0 \textit{ pour } y \in \mathcal{D}_F \\ \Leftrightarrow \quad & y^2 = \frac{9}{25} \\ \Leftrightarrow \quad & y = \frac{3}{5} \text{ OU } y = -\frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi, si y est une solution de (F), alors $y \in \left\{-\frac{3}{5}; 0; \frac{3}{5}\right\}$.

Synthèse. L'énoncé nous assure qu'il y a au moins trois solutions. N'ayant que trois candidats, on en conclut que chacune de ces valeurs est bien solution.

Conclusion, l'ensemble des solutions de (F) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_F = \left\{-\frac{3}{5}; 0; \frac{3}{5}\right\}.}$$

15. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = \frac{1}{\text{ch}(x)}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \text{ solution (E)} \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right) + \arccos\left(\frac{8}{5\,\text{ch}(x)}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \arccos\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right) + \arccos\left(\frac{8}{5\,\text{ch}(x)}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \arccos(y) = \arcsin(y) + \arccos\left(\frac{8y}{5}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad y \text{ solution de (F)} \\ &\Leftrightarrow \quad y = -\frac{3}{5} \text{ OU } y = 0 \text{ OU } y = \frac{3}{5} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\text{ch}(x)} = -\frac{3}{5} \text{ OU } \frac{1}{\text{ch}(x)} = 0 \text{ OU } \frac{1}{\text{ch}(x)} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{\text{ch}(x)} > 0$. Par conséquent,

$$x \text{ solution (E)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\text{ch}(x)} = \frac{3}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \text{ch}(x) = \frac{5}{3}.$$

Posons $X = \text{e}^x > 0$. On a

$$\begin{aligned} x \text{ solution (E)} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{X + \frac{1}{X}}{2} = \frac{5}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad X + \frac{1}{X} = \frac{10}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad X^2 - \frac{10}{3}X + 1 = 0. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé : $\Delta = \frac{100}{9} - 4 = \frac{100-36}{9} = \frac{64}{9}$. Par suite,

$$\begin{aligned} x \text{ solution (E)} \quad &\Leftrightarrow \quad X = \frac{\frac{10}{3} - \frac{8}{3}}{2} = \frac{1}{3} \text{ OU } X = \frac{\frac{10}{3} + \frac{8}{3}}{2} = 3 \\ &\Leftrightarrow \quad \text{e}^x = \frac{1}{3} \text{ OU } \text{e}^x = 3 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -\ln(3) \text{ OU } x = \ln(3). \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \{-\ln(3); \ln(3)\}.}$$

Pour les curieux qui n'aiment pas admettre de résultat. Voici comment il était possible de démontrer que les trois réels $-\frac{3}{5}$, 0 et $\frac{3}{5}$ sont bien solutions de (F). *Posons $h : y \mapsto \arccos(y) - \arcsin(y)$. La fonction h est définie et continue sur $[-1;1]$ et dérivable sur $]-1;1[$. De plus, pour tout $y \in]-1;1[$,*

$$h'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{-2}{\sqrt{1-y^2}}.$$

On note donc que pour tout $y \in]-1;1[$, $h'(y) < 0$. Donc la fonction h est strictement décroissante sur $]-1;1[$ et par continuité sur $[-1;1]$. Or $h(-1) = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ et $h(1) = 0 - \frac{\pi}{2}$, on obtient donc le tableau suivant :

y	-1	1
h	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$

Poursuivons, on a $h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$ *et* $h\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi$*. On en déduit donc le tableau restreint suivant :*

y	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
h	π ↘ 0

Ainsi, pour tout $y \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$*, on a* $h(y) \in [0;\pi]$*. Par conséquent, pour tout* $y \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ *et tout* $u \in [-1;1]$*, l'implication suivante est vraie*

$$\cos\left(h(y)\right) = u \;\Rightarrow\; h(y) = \arccos\left(u\right).$$

C'était le seul endroit où dans notre raisonnement précédent nous avions perdu l'équivalence, nous avions écrit que $h(y) = \arccos\left(\frac{8y}{5}\right) \;\Rightarrow\; \cos\left(h(y)\right) = \cos\left(\arccos\left(\frac{8y}{5}\right)\right) = \frac{8y}{5}$*. La réciproque et donc l'équivalence pour tout* $y \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ *est donc vraie. Il est donc possible de reprendre tout le raisonnement avec des équivalences pour* $y \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$*. Enfin, on note que* $-\frac{3}{5}$*,* 0*,* $\frac{3}{5}$ *sont trois éléments de* $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ *ce qui achève la démonstration.*

FIN