

Correction de l'interrogation 0

Révisions de calculs

1. Simplifier $A = \frac{\frac{5}{7} - \frac{3}{4}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{20} - \frac{5}{28}}$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$A = \frac{\frac{20-21}{28}}{\frac{5+2}{40} - \frac{5}{28}} = \frac{-\frac{1}{28}}{\frac{7 \times 7 - 50}{280}} = -\frac{1}{28} \times \frac{280}{49-50} = 10.$$

Conclusion,

$$\boxed{A = 10.}$$

2. Simplifier $B = \frac{8^2 \times 27 \times 175}{12^3 \times \frac{1}{7} \times 245}$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$B = \frac{(2^3)^2 \times 3^3 \times 5 \times 35}{4^3 \times 3^3 \times \frac{1}{7} \times 5 \times 49} = \frac{2^6 \times 3^3 \times 5^2 \times 7}{2^6 \times 3^3 \times \frac{1}{7} \times 5 \times 7^2} = 5.$$

Conclusion,

$$\boxed{B = 5.}$$

3. Simplifier $C = \frac{22}{\sqrt{11}} - \sqrt{275} + \sqrt{176}$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} C &= \frac{22}{\sqrt{11}} - \sqrt{275} + \sqrt{176} \\ &= \frac{11 \times 2}{\sqrt{11}} - \sqrt{55 \times 5} + \sqrt{88 \times 2} \\ &= 2\sqrt{11} - \sqrt{11 \times 5^2} + \sqrt{11 \times 8 \times 2} \\ &= 2\sqrt{11} - 5\sqrt{11} + 4\sqrt{11} \\ &= \sqrt{11}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{C = \sqrt{11}.}$$

4. Simplifier $D = \frac{1}{7} \sqrt{\frac{(\sqrt{45}^{\sqrt{3}} \sqrt{245}^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}}}{15^4}}$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$D = \frac{1}{7} \sqrt{\frac{(\sqrt{9 \times 5 \times 5 \times 49})^6}{15^4}} = \frac{1}{7} \frac{(3 \times 5 \times 7)^3}{15^2} = 3 \times 5 \times 7^2 = 3 \times 5 \times 49 = 3 \times 245 = 735.$$

Conclusion,

$$\boxed{D = 735.}$$

5. Simplifier $E = \ln(40^4) + \frac{1}{2} \ln\left(\left(\frac{1}{64 \times 25}\right)^3\right) - \ln(20)$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
 E &= \ln(40^4) + \frac{1}{2} \ln \left(\left(\frac{1}{64 \times 25} \right)^3 \right) - \ln(20) \\
 &= 4 \ln(40) + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{1}{64 \times 25} \right) - \ln(4 \times 5) \\
 &= 4 \ln(4 \times 2 \times 5) - \frac{3}{2} \ln(64 \times 25) - \ln(4) - \ln(5) \\
 &= 4 \ln(4) + 4 \ln(2) + 4 \ln(5) - \frac{3}{2} \ln(8^2 \times 5^2) - \ln(4) - \ln(5) \\
 &= 3 \ln(4) + 4 \ln(2) + 3 \ln(5) - \frac{3}{2} \ln((8 \times 5)^2) \\
 &= 3 \ln(2^2) + 4 \ln(2) + 3 \ln(5) - 3 \ln(2^3 \times 5) \\
 &= 6 \ln(2) + 4 \ln(2) + 3 \ln(5) - 9 \ln(2) - 3 \ln(5) \\
 &= \ln(2).
 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$E = \ln(2).$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier et mettre sous forme factorisée $F = \frac{(e^x)^3 \sqrt{e^x}}{e^{\frac{3x}{2}}} + 2e^x + e^{4x} ((e^{-x})^2)^2$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{(e^x)^3 \sqrt{e^x}}{e^{\frac{3x}{2}}} + 2e^x + e^{4x} ((e^{-x})^2)^2 \\
 &= \frac{e^{3x} (e^x)^{1/2}}{e^{\frac{3x}{2}}} + 2e^x + e^{4x} (e^{-2x})^2 \\
 &= \frac{e^{3x} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{3x}{2}}} + 2e^x + e^{4x} e^{-4x} \\
 &= e^{3x + \frac{x}{2} - \frac{3x}{2}} + 2e^x + 1 \\
 &= e^{3x-x} + 2e^x + 1 \\
 &= e^{2x} + 2e^x + 1 \\
 &= (e^x)^2 + 2e^x + 1 \\
 &= (e^x + 1)^2.
 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$F = (e^x + 1)^2.$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $G = (2 - 5x)^3$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
 G &= (2 - 5x)^3 \\
 &= (2 - 5x)^2 \times (2 - 5x) \\
 &= (4 - 20x + 25x^2) (2 - 5x) \\
 &= 8 - 20x - 40x + 100x^2 + 50x^2 - 125x^3 \\
 &= 8 - 60x + 150x^2 - 125x^3.
 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$G = 8 - 60x + 150x^2 - 125x^3.$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser au maximum $H = 63x^4 - 84x^3 + 28x^2$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
 H &= 63x^4 - 84x^3 + 28x^2 \\
 &= 7x^2 (9x^2 - 12x + 4) \\
 &= 7x^2 (3x - 2)^2
 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$H = 7x^2 (3x - 2)^2 .$$

9. Déterminer le domaine de dérivabilité puis dériver $f : x \mapsto \sin (\ln (x^3 + 1))$.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$f \text{ est dérivable en } x \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 > -1 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1.$$

Donc f est dérivable sur $] -1; +\infty[$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in] -1; +\infty[, \quad f'(x) &= (\ln (x^3 + 1))' \cos (\ln (x^3 + 1)) \\ &= \frac{(x^3 + 1)'}{x^3 + 1} \cos (\ln (x^3 + 1)) \\ &= \frac{3x^2}{x^3 + 1} \cos (\ln (x^3 + 1)) . \end{aligned}$$

Conclusion, f est dérivable sur $] -1; +\infty[$ et

$$\forall x \in] -1; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{3x^2}{x^3 + 1} \cos (\ln (x^3 + 1)) .$$

10. Déterminer le domaine de dérivabilité puis dériver $g : x \mapsto e^{\left(\frac{1-x}{x^2+1}\right)^3}$.

Solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Donc $x \mapsto \frac{1-x}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas et donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont. De plus,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g'(x) &= \left[\left(\frac{1-x}{x^2+1} \right)^3 \right]' e^{\left(\frac{1-x}{x^2+1} \right)^3} \\ &= 3 \left(\frac{1-x}{x^2+1} \right)' \left(\frac{1-x}{x^2+1} \right)^2 e^{\left(\frac{1-x}{x^2+1} \right)^3} \\ &= 3 \frac{(1-x)'(x^2+1) - (1-x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \left(\frac{1-x}{x^2+1} \right)^2 e^{\left(\frac{1-x}{x^2+1} \right)^3} \\ &= 3 \frac{-(x^2+1) - (1-x)(2x)}{(x^2+1)^2} \frac{(1-x)^2}{(x^2+1)^2} e^{\left(\frac{1-x}{x^2+1} \right)^3} \\ &= 3 \frac{-x^2 - 1 - 2x + 2x^2}{(x^2+1)^2} \frac{(1-x)^2}{(x^2+1)^2} e^{\left(\frac{1-x}{x^2+1} \right)^3} \\ &= 3 \frac{(x^2 - 2x - 1)(1-x)^2}{(x^2+1)^4} e^{\left(\frac{1-x}{x^2+1} \right)^3} . \end{aligned}$$

Conclusion, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 3 \frac{(x^2 - 2x - 1)(1-x)^2}{(x^2+1)^4} e^{\left(\frac{1-x}{x^2+1} \right)^3} .$$