

Correction de l'interrogation 01

Logique et raisonnement

1. (a) Énoncer les lois de Morgan.

Solution. Soient P et Q deux assertions. On a

$$\overline{P \text{ ET } Q} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P} \text{ OU } \overline{Q}$$

et

$$\overline{\overline{P} \text{ OU } \overline{Q}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P} \text{ ET } \overline{Q}$$

- (b) Compléter le plus précisément possible avec les symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ ou $\times$ (lorsqu'aucun des précédents symboles ne fonctionne) les phrases suivantes. Soient $t \in \mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $p \in \mathbb{Z}$ et $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- 1.1 $(t^3 = 27) \Leftrightarrow (t = 3)$ En effet, d'une part, si $t = 3$, alors $t^3 = 27$. Réciproquement, la fonction $t \mapsto t^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc l'équation $t^3 = 27$ ne peut admettre qu'au plus une solution et donc aucune autre que $t = 3$.

- 1.2 $(a^2 + b^2 = 2) \Leftarrow \begin{cases} a \in \{-1; 1\} \\ b \in \{-1; 1\} \end{cases}$. En effet, supposons $\begin{cases} a \in \{-1; 1\} \\ b \in \{-1; 1\} \end{cases}$. Alors $a^2 = 1$ et $b^2 = 1$ donc $a^2 + b^2 = 1 + 1 = 2$. La réciproque cependant est fautive. Contre-exemple : si $a = 0$ et $b = \sqrt{2}$, alors $a^2 + b^2 = 2$ et pourtant $a \notin \{-1; 1\}$.

- 1.3 $(x = y) \Rightarrow (p \ln(x) - \ln(y^p) = 0)$. En effet, si $x = y$, alors $p \ln(x) - \ln(y^p) = p \ln(x) - \ln(x^p) = p \ln(x) - p \ln(x) = 0$. Cependant, si $p = 0$, $x = 2$ et $y = 1$ par exemple, on a $x \neq y$ et pourtant $p \ln(x) - \ln(y^p) = 0 - \ln(1) = 0$.

- 1.4 $(f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}) \times (f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R})$. En effet, par exemple la fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable partout sur $\mathbb{R}$ (n'est pas dérivable en tout point $x \in \mathbb{Z}$). Dans l'autre sens, la fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Soient $(a, b, A) \in \mathbb{R}^3$, $a < b$ et $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$. Énoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

$$\begin{cases} f(a) \leq A \leq f(b) \\ f \text{ continue sur } [a; b] \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \exists c \in [a; b], A = f(c).$$

Solution. La réciproque est

$$\exists c \in [a; b], A = f(c) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(a) \leq A \leq f(b) \\ f \text{ continue sur } [a; b] \end{cases}.$$

La contraposée est

$$\forall c \in [a; b], A \neq f(c) \quad \Rightarrow \quad f(a) > A \text{ OU } A > f(b) \text{ OU } f \text{ n'est pas continue sur } [a; b].$$

La négation est

$$f(a) \leq A \leq f(b) \text{ ET } f \text{ continue sur } [a; b] \text{ ET } \forall c \in [a; b], A \neq f(c).$$

3. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Écrire avec un ou des quantificateurs le fait que si deux réels ont la même image par f alors ils sont égaux puis sa négation.

Solution. L'assertion est

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y).$$

La négation est donc,

$$\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y \text{ tel que } f(x) = f(y).$$

4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « $u_n = 2^n - 1$ ».

Initialisation. Si $n = 0$, alors $2^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = u_0$. Donc $P(0)$ est vraie. De plus si $n = 1$, alors $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1 = u_1$, donc $P(1)$ est également vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $(P(n) \text{ ET } P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies et montrons $P(n+2)$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n && \text{par définition de } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ &= 3(2^{n+1} - 1) - 2(2^n - 1) && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 3 \times 2^{n+1} - 3 - 2^{n+1} + 2 \\ &= (3 - 1)2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n+2)$ est aussi vraie.

Conclusion, par récurrence double, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 1}$.

5. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{2x^2 + x - 1} = x + 1$.

Solution. Méthode 1 - Analyse-Synthèse. Analyse. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{2x^2 + x - 1} = x + 1$. Alors

$$2x^2 + x - 1 = (x + 1)^2 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0.$$

Soit Δ le discriminant de $x^2 - x - 2$. On a $\Delta = 1 + 8 = 9$ donc $x = \frac{1-3}{2} = -1$ ou $x = \frac{1+3}{2} = 2$.

Synthèse. Si $x = -1$, alors $\sqrt{2x^2 + x - 1} = \sqrt{2 - 1 - 1} = 0$ et $-1 + 1 = 0$. Donc $x = -1$ est une solution.

Si $x = 2$, alors $\sqrt{2x^2 + x - 1} = \sqrt{8 + 2 - 1} = 3$ et $x + 1 = 2 + 1 = 3$. Donc $x = 2$ est une solution. Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{2x^2 + x - 1} = x + 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ OU } x = 2.}$$

Méthode 2 - par équivalences. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 + x - 1} = x + 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 + x - 1 = (x + 1)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^2 + x - 1 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de $x^2 - x - 2$. On a $\Delta = 1 + 8 = 9$ donc les racines associées sont $\frac{1-3}{2} = -1$ et $\frac{1+3}{2} = 2$. Dès lors,

$$\sqrt{2x^2 + x - 1} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = -1 \text{ OU } x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 \text{ OU } x = 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{2x^2 + x - 1} = x + 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ OU } x = 2.}$$