

Correction de l'interrogation 02

Fonctions réelles

1. (a) Définir une fonction impaire. Que dire de son graphe ?

Solution. Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$. La fonction f est impaire si

- U est centré en 0,
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$.

Le graphe de f est alors symétrique par rapport à $(0, 0)$.

- (b) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Solution. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$. Si f est continue sur $[a; b]$ alors,

$$\forall \lambda \in [f(a); f(b)], (\text{ ou } [f(b); f(a)]), \exists c \in [a; b], \quad f(c) = \lambda.$$

2. Soit $f : x \mapsto \ln(xe^x - xe^{-x})$. Déterminer l'ensemble de définition de f ainsi que sa parité.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} &\Leftrightarrow xe^x - xe^{-x} > 0 \\ &\Leftrightarrow x(e^x - e^{-x}) > 0 \\ &\Leftrightarrow (x > 0 \text{ ET } e^x - e^{-x} > 0) \quad \text{OU} \quad (x < 0 \text{ ET } e^x - e^{-x} < 0) \\ &\Leftrightarrow (x > 0 \text{ ET } e^x > e^{-x}) \quad \text{OU} \quad (x < 0 \text{ ET } e^x < e^{-x}). \end{aligned}$$

Or si $x > 0$, alors $x > -x$ et donc par la stricte croissance de l'exponentielle, $e^x > e^{-x}$ est toujours vraie. De même si $x < 0$ alors $x < -x$ et donc $e^x < e^{-x}$. Ainsi,

$$f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow (x > 0) \quad \text{OU} \quad (x < 0) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*.$$

Ainsi, la fonction f est définie sur

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*.$$

(i) On note que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ est centré en 0.

(ii) De plus pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f(-x) = \ln(-xe^{-x} + xe^x) = \ln(xe^x - xe^{-x}) = f(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire.}}$$

3. Montrer que l'équation $\frac{x^2}{2} + 5 = e^x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.

Solution. Posons $f : x \mapsto e^x - \frac{x^2}{2} - 5$. L'équation est alors équivalente à $f(x) = 0$. La fonction f est définie, continue et même dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = e^x - x.$$

Or on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1 > x$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) > 0$ et la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f(0) = 1 - 5 < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par croissance comparée. Dès lors, on a

- f est continue sur $[0; +\infty[$,
- f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$
- $0 \in \left[f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$

Donc par le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) :

$$\exists! \alpha \in [0; +\infty[, \quad f(\alpha) = 0.$$

Autrement dit

$$\boxed{\text{l'équation } \frac{x^2}{2} + 5 = e^x \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}_+.$$

4. Donner le tableau de variations de $f : x \mapsto \frac{x^2}{x-1}$ sur son domaine de définition.

Solution. La fonction f est définie et même dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ en tant que quotient de fonction polynomiale dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

De plus,

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
x		0			
$x - 2$					
$f'(x)$					

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2}{x(1 - \frac{1}{x})} = \frac{x}{1 - \frac{1}{x}}.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1 - \frac{1}{x}} = -\infty.$$

De même,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 - \frac{1}{x}} = +\infty.$$

Aussi, $f(0) = 0$, $f(2) = \frac{4}{2-1} = 4$ et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Conclusion, on en déduit le tableau de variation suivant

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
f	$-\infty$	0	$+\infty$	4	$+\infty$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer les dérivées n -ièmes de $H : x \mapsto x e^{2x}$.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction H est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont. De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H(x) = x e^{2x}$$

$$H'(x) = e^{2x} + 2x e^{2x} = (2x + 1) e^{2x}$$

$$H''(x) = 2 e^{2x} + 2(2x + 1) e^{2x} = (4x + 4) e^{2x} = 2(2x + 2) e^{2x}$$

$$H^{(3)}(x) = 4 e^{2x} + 2(4x + 4) e^{2x} = 4(2x + 3) e^{2x}$$

$$H^{(4)}(x) = 8 e^{2x} + 2(8x + 12) e^{2x} = 8(2x + 4) e^{2x}.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}(n) : \quad \ll \forall x \in \mathbb{R}, H^{(n)}(x) = 2^{n-1} (2x + n) e^{2x}. \gg$$

Procédons par récurrence.

Initialisation. Si $n = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2^{n-1} (2x + n) e^{2x} = \frac{1}{2} (2x + 0) e^{2x} = x e^{2x} = H(x)$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H^{(n)}(x) = 2^{n-1} (2x + n) e^{2x}.$$

En dérivant car $H^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, on obtient,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad H^{(n+1)}(x) &= \left(H^{(n)} \right)'(x) \\ &= 2^{n-1} (2) e^{2x} + 2^{n-1} (2x + n) 2 e^{2x} &&= 2^n e^x + 2^n (2x + n) e^{2x} \\ &= 2^n (1 + 2x + n) e^{2x} \\ &= 2^n (2x + n + 1) e^{2x}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{H \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } \mathbb{R}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad H^{(n)}(x) = 2^{n-1} (2x + n) e^{2x} .}$$