

Correction de l'interrogation 03

Bijections

1. (a) Énoncer le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque.

Solution. Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Si

- f est dérivable sur I ,
- strictement monotone sur I ,
- et $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$,

alors f^{-1} existe, est dérivable sur $J = f(I)$ et

$$\forall x \in J, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

- (b) Définir la négligeabilité entre deux fonctions.

Solution. Soient $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a , $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$. On dit que f est négligeable devant g , $f(x) \ll_{x \rightarrow a} g(x)$ ou encore $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$. Déterminer $f([-3; 1])$ et $f^{-1}([\ln(5); 2])$. Puis préciser si f est injective, surjective et/ou bijective.

Solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Donc f est bien définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

On en déduit que f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a les calculs suivants :

$$f(0) = \ln(1) = 0, \quad f(-3) = \ln(9 + 1) = \ln(10), \quad f(1) = \ln(2).$$

Puis pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = \ln(5) &\Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = \ln(5) &\Leftrightarrow x^2 + 1 = 5 &\Leftrightarrow x^2 = 4 \\ &&&&\Leftrightarrow x = 2 \text{ OU } x = -2. \end{aligned}$$

Enfin, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) = 2 &\Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = 2 &\Leftrightarrow x^2 + 1 = e^2 \\ &&\Leftrightarrow x^2 = e^2 - 1 \\ &&\Leftrightarrow x = \sqrt{e^2 - 1} \text{ OU } x = -\sqrt{e^2 - 1}, &\text{ car } e^2 - 1 > 0. \end{aligned}$$

Au bilan, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-3	$-\sqrt{e^2 - 1}$	-2	0	1	2	$\sqrt{e^2 - 1}$	$+\infty$
f	$\swarrow \ln(10) \quad \swarrow 2 \quad \swarrow \ln(5) \quad \searrow 0 \quad \searrow \ln(2) \quad \searrow \ln(5) \quad \searrow 2 \quad \searrow$								

Dès lors, on obtient :

$$f([-3; 1]) = [0; \ln(10)] \quad \text{et} \quad f^{-1}([\ln(5); 2]) = [-\sqrt{e^2 - 1}; -2] \cup [2; \sqrt{e^2 - 1}].$$

Puisque $f(-1) = \ln(2) = f(1)$ par exemple, on en déduit que f n'est pas injective. Cependant puisque f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème de la bijection, f sur $\mathbb{R}_+$, définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans

$$f(\mathbb{R}_+) = \left[f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= [0; +\infty[= \mathbb{R}_+.$$

Par conséquent, tout réel positif admet un antécédent par f dans $\mathbb{R}_+$ (et on peut montrer qu'il y en a un second dans $\mathbb{R}_-$). Donc f est surjective. Conclusion,

la fonction f n'est pas injective ni donc bijective mais est surjective.

3. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. On admet que f définit une bijection et on note g sa réciproque. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$g'(x) = \frac{e}{f(g(x) + 1)}.$$

Solution. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de fonctions qui le sont et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(x) = (x + 1)e^x > 0.$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \neq 0$. Donc par le théorème de la dérivabilité de la réciproque, g est dérivable sur $f(\mathbb{R}_+)$. De plus, $f(\mathbb{R}_+) = \left[f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= [0; +\infty[= \mathbb{R}_+$. Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, on sait également que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

Or pour tout $y \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(y) = (y + 1)e^y = (y + 1)e^{y+1}e^{-1} = f(y + 1)e^{-1}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, en posant $y = g(x) \geq 0$, (car g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$)

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))e^{-1}} = \frac{e}{f(g(x) + 1)}.$$

Conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g'(x) = \frac{e}{f(g(x) + 1)}.$$

4. Préciser le comportement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x}$.

On pourra penser à multiplier par « la quantité conjuguée ».

Solution. On observe que pour tout $x \geq 4$,

$$f(x) = x\sqrt{1 - \frac{4}{x}}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$ donc par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{4}{x}} = 1$ et par produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

De plus, pour tout $x \geq 4$, $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{1 - \frac{4}{x}}$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Enfin, pour tout $x \geq 4$,

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \sqrt{x^2 - 4x} - x \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 - 4x} - x)(\sqrt{x^2 - 4x} + x)}{\sqrt{x^2 - 4x} + x} \\ &= \frac{x^2 - 4x - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x} + x} \\ &= \frac{-4x}{\sqrt{x^2 - 4x} + x} \\ &= \frac{-4}{\sqrt{1 - \frac{4}{x}} + 1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \frac{-4}{1 + 1} = -2.$$

Conclusion, le graphe de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation

$$y = x - 2.$$

5. Comparer au voisinage de 0^+ les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x^2(x+2)^2}$.

Solution. Soit $x > 0$, on a

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2(x+2)^2}} = x^2(x+2)^2 \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2}} = x(x+2)^2 \sqrt{1 + x + x^2} \xrightarrow[x > 0]{x \rightarrow 0} 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset[x > 0]{x \rightarrow 0} \ll g(x) \quad \text{i.e.} \quad f(x) \underset[x > 0]{x \rightarrow 0} = o(g(x)).}$$