

Correction de l'interrogation 4 Trigonométrie

1. (a) Dresser les variations de cosinus sur $[0; 2\pi]$.

Solution. Pour le cosinus, on a

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$x \mapsto \cos(x)$	1	0	-1	0	1

- (b) Enoncer les formules de l'angle moitié.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ tel que $\frac{x}{2} \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Posons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Alors,

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. **Linéariser** $\cos^3(x) \sin(3x)$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} \cos^3(x) \sin(3x) &= \cos^2(x) \cos(x) \sin(3x) \\ &= \frac{1 + \cos(2x)}{2} \frac{\sin(3x+x) + \sin(3x-x)}{2} \\ &= \frac{1}{4} (1 + \cos(2x)) (\sin(4x) + \sin(2x)) \\ &= \frac{1}{4} (\sin(4x) + \sin(2x) + \cos(2x) \sin(4x) + \cos(2x) \sin(2x)) \\ &= \frac{1}{4} \left(\sin(4x) + \sin(2x) + \frac{\sin(4x+2x) + \sin(4x-2x)}{2} + \frac{\sin(4x)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{8} (2 \sin(4x) + 2 \sin(2x) + \sin(6x) + \sin(2x) + \sin(4x)) \\ &= \frac{1}{8} (\sin(6x) + 3 \sin(4x) + 3 \sin(2x)). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\cos^3(x) \sin(3x) = \frac{1}{8} (\sin(6x) + 3 \sin(4x) + 3 \sin(2x)).$$

Vérification : si $x = \frac{\pi}{4}$, on a $\cos^3\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{4}$. D'autre part,

$$\frac{1}{8} \left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 3 \sin(\pi) + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{1}{8} (-1 + 0 + 3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \text{ OK!}$$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, **factoriser** $\cos(3\theta) + \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right)$.

Solution. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) + \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(3\theta) + \cos(2\theta) \\ &= 2 \cos\left(\frac{3\theta+2\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta-2\theta}{2}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(3\theta) + \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{5\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\cos(2x) + 2 = 5 \sin(x)$ et représenter les solutions entre 0 et 2π sur le cercle trigonométrique.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\cos(2x) + 2 = 5 \sin(x) \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 2 \sin^2(x) + 2 = 5 \sin(x) \quad \Leftrightarrow \quad 2 \sin^2(x) + 5 \sin(x) - 3 = 0.$$

Posons $X = \sin(x)$. On a

$$\cos(2x) + 2 = 5 \sin(x) \quad \Leftrightarrow \quad 2X^2 + 5X - 3 = 0.$$

Soit Δ le discriminant associé. On a $\Delta = 25 + 24 = 49$. Donc les racines associées sont $\frac{-5-7}{4} = -3$ et $\frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$. Dès lors,

$$\cos(2x) + 2 = 5 \sin(x) \quad \Leftrightarrow \quad X = -3 \text{ OU } X = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x) = -3 \text{ OU } \sin(x) = \frac{1}{2}.$$

Or $\sin(x) \geq -1 > -3$. Donc

$$\cos(2x) + 2 = 5 \sin(x) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ OU } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Vérification : si $x = \frac{\pi}{6}$, on a $\cos(2x) + 2 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$ et $5 \sin(x) = 5 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{2}$ OK!

Si $x = \frac{5\pi}{6}$, $\cos(2x) + 2 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$ et $5 \sin(x) = 5 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5}{2}$ OK!

5. Déterminer l'ensemble des réels $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{3} \cos(\theta) < \sqrt{2} - \sin(\theta)$ et représenter les solutions entre 0 et 2π sur le cercle trigonométrique.

Solution. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. A l'aide de la forme polaire/normalisée, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cos(\theta) + \sin(\theta) < \sqrt{2} & \Leftrightarrow 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta) + \frac{1}{2} \sin(\theta) \right) < \sqrt{2} \\ & \Leftrightarrow 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(\theta) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(\theta) \right) < \sqrt{2} \\ & \Leftrightarrow 2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) < \sqrt{2} \\ & \Leftrightarrow \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ & \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{4} + 2k\pi < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \\ & \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{5\pi}{12} + 2k\pi < \theta < \frac{23\pi}{12} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{5\pi}{12} + 2k\pi; \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \right[.$$