Correction de l'interrogation 6
Calcul algébrique

1. (a) Donner la somme des premiers entiers, de leurs carrés, de leurs cubes.
Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2.$$

(b) Définir le coefficient binomial.
Solution. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$.

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \in [\![0;n]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=4}^{n+3} \left(\ln\left(3a^k\right) + 3a^k\right)$.

Solution. Par propriété du logarithme, on a

$$S_n = \sum_{k=4}^{n+3} \left(k \ln(a) + \ln(3) + 3a^k\right).$$

Donc par linéarité de la somme,

$$\begin{aligned} S_n &= \ln(a) \sum_{k=4}^{n+3} k + \sum_{k=4}^{n+3} \ln(3) + 3\sum_{k=4}^{n+3} a^k \\ &= \ln(a) \left(\sum_{k=1}^{n+3} k - 1 - 2 - 3\right) + (n+3-4+1)\ln(3) + 3a^4 \frac{1-a^{n+3-4+1}}{1-a} \qquad \text{car } a \neq 1 \\ &= \ln(a) \left(\frac{(n+3)\,(n+4)}{2} - 6\right) + n\ln(3) + 3a^4 \frac{1-a^n}{1-a} \\ &= \ln(a) \left(\frac{n^3+7n}{2}\right) + n\ln(3) + 3a^4 \frac{1-a^n}{1-a} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \ln(a)\,\frac{n\,(n+7)}{2} + n\ln(3) + 3a^4 \frac{1-a^n}{1-a}.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k$ à l'aide d'une inversion d'indice.

Solution. Posons $\tilde{k} = n - k$. Si k = 1, $\tilde{k} = n - 1$, si $k = n$, $\tilde{k} = 0$ Alors,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k \\
&= \sum_{\tilde{k}=0}^{n-1} \binom{n}{n-\tilde{k}} (n - \tilde{k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{n-k} (n - k) \quad \text{car l'indice est muet} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{n-k} n - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{n-k} k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} n - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} k \qquad \text{car } \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n - \binom{n}{n} n - \left(\binom{n}{0} \times 0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k - \binom{n}{n} n \right) \\
&= n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - n - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k + n \\
&= n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - S_n.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$2S_n = n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \Leftrightarrow \qquad S_n = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

On reconnait alors un binôme de Newton, donc

$$S_n = \frac{n}{2} (1+1)^n = \frac{n 2^n}{2} = n 2^{n-1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = n 2^{n-1}.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{n}{j} i^2 2^j$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} i^2 2^j \\
&= \sum_{i=0}^{n} i^2 \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^j \\
&= \sum_{i=0}^{n} i^2 (1+2)^n \qquad \text{car on reconnaît une somme binomiale} \\
&= \sum_{i=0}^{n} i^2 \times 3^n \\
&= 3^n \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \frac{3^n n (n+1) (2n+1)}{6}.}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \binom{n}{j}\binom{j}{i}$.

Solution. On reconnait une somme triangulaire. On ne sait pas sommer en interne sur j (essayer pour vous en rendre compte). On va sommer en interne sur i :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \binom{n}{j}\binom{j}{i} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{j-1} \binom{n}{j}\binom{j}{i} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} \qquad \text{car } \binom{n}{j} \text{ ne dépend pas de } i \\
&= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \left(\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} - \binom{j}{j} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \left(\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} 1^i 1^{j-i} - 1 \right).
\end{aligned}$$

On reconnait un binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \left((1+1)^j - 1 \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \left(2^j - 1 \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(2^j - 1 \right) - \binom{n}{0} \left(2^0 - 1 \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^j - \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}.
\end{aligned}$$

On reconnait deux binômes de Newton :

$$S_n = (2+1)^n - 2^n = 3^n - 2^n.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = 3^n - 2^n.}$$