

Réponses de l'interrogation 6

Calcul algébrique

1. (a) Donner la somme des premiers entiers, de leurs carrés, de leurs cubes.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

- (b) Définir le coefficient binomial.

Solution. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$.

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \in \llbracket 0; n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=4}^{n+3} (\ln(3a^k) + 3a^k)$.

Solution. Conclusion,

$$S_n = \ln(a) \frac{n(n^2+7)}{2} + n \ln(3) + 3a^4 \frac{1-a^n}{1-a}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k$ à l'aide d'une inversion d'indice.

Solution. Conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = n2^{n-1}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \sum_{0 \leq i, j \leq n} \binom{n}{j} i^2 2^j$.

Solution. Conclusion,

$$S_n = \frac{3^n n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{0 \leq i < j \leq n} \binom{n}{j} \binom{j}{i}$.

Solution. Conclusion,

$$S_n = 3^n - 2^n.$$