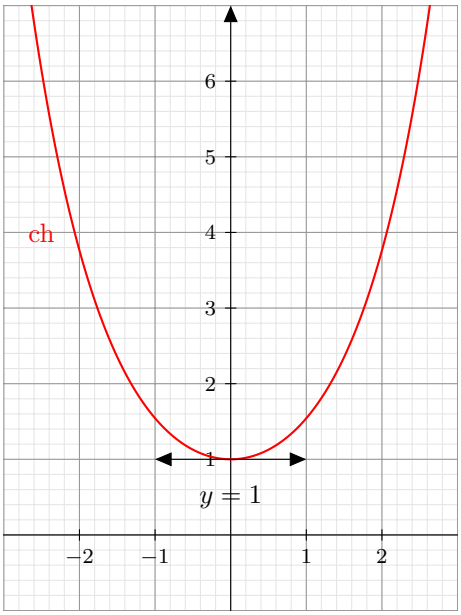
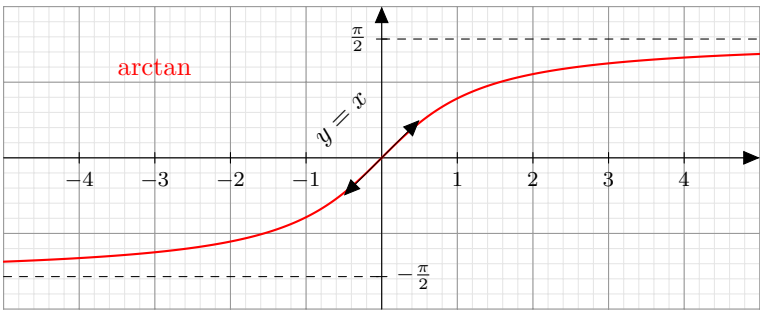
Correction de l'interrogation 7
Fonctions usuelles

1. (a) Enoncer la croissance comparée de l'exponentielle en $-\infty$/en $+\infty$.
Solution. Soient $a > 0$ et $b > 0$. On a

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^b \, \mathrm{e}^{ax} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^b} = +\infty.$$

(b) Tracer le graphe de la fonction cosinus hyperbolique et arctan, y faire apparaitre les valeurs remarquables, les tangentes remarquables, les asymptotes remarquables.





(c) Définir l'image et l'image réciproque d'un ensemble par une fonction.
Solution. Soient $U \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$, $A \subseteq U$ et $B \subseteq \mathbb{R}$.

- L'image directe de A par f est

$$f(A) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A,\ y = f(x) \}.$$

- L'image réciproque de B par f est

$$f^{\leftarrow}(B) = \{ x \in U \mid f(x) \in B \}.$$

2. Déterminer $\mathscr{D}_f$ le domaine de définition de $f : x \mapsto \ln(\mathrm{sh}(x)) + \ln(\mathrm{ch}(2x)) - \ln(\mathrm{sh}(3x) - \mathrm{sh}(x))$ puis montrer que $\forall x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = -\ln(a)$ où a est un réel indépendant de x que l'on précisera.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{sh}(x) > 0 \\ \operatorname{ch}(2x) > 0 \text{ toujours vrai car } \operatorname{ch}(u) \geqslant 1 \text{ pour tout } u \in \mathbb{R} \\ \operatorname{sh}(3x) - \operatorname{sh}(x) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ \operatorname{sh}(3x) - \operatorname{sh}(x) > 0. \end{cases}$$

Pour tout $x > 0$, $3x > x$. De plus la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc si $x > 0$, alors nécessairement $\operatorname{sh}(3x) > \operatorname{sh}(x)$. Ainsi,

$$f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad x > 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^*.}$$

De plus, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(\operatorname{sh}(x)) + \ln(\operatorname{ch}(2x)) - \ln(\operatorname{sh}(3x) - \operatorname{sh}(x)) \\ &= \ln\left(\frac{\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(2x)}{\operatorname{sh}(3x) - \operatorname{sh}(x)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}}{2}}{\frac{\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-3x}}{2} - \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\frac{\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-3x}}{4}}{\frac{\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-3x} - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -\ln(2). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]0;+\infty[, \qquad f(x) = -\ln(2).}$$

3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^3 \arctan(\operatorname{ch}(x))}{1+\operatorname{sh}(x)}}$.

Solution. Soit $x > 0$, on a

$$\sqrt{\frac{x^3 \arctan(\operatorname{ch}(x))}{1+\operatorname{sh}(x)}} = \sqrt{\frac{x^3 \arctan(\operatorname{ch}(x))}{1+\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}}} = \sqrt{\frac{2x^3}{\mathrm{e}^x} \times \frac{\arctan(\operatorname{ch}(x))}{1+2\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}}.$$

Or puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{u\to+\infty} \arctan(u) = \dfrac{\pi}{2}$, par composition,

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(\operatorname{ch}(x)) = \frac{\pi}{2}.$$

De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} 1 + 2\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x} = 1.$$

Enfin, par croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

Donc par produit et quotient,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{\mathrm{e}^x} \frac{\arctan(\operatorname{ch}(x))}{1+2\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}} = 0 \times \frac{\frac{\pi}{2}}{1} = 0.$$

Conclusion, par composition avec la racine carrée,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^3 \arctan(\operatorname{ch}(x))}{1+\operatorname{sh}(x)}} = 0.}$$

4. Soit $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}\right)$. Déterminer $\mathcal{D}_1$ le domaine de **dérivabilité** de f et simplifier f sur $\mathcal{D}_1$.
Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_1 \quad &\Leftarrow \quad \begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ 1+x \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 > x^2 \\ x \neq -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in]-1;1[. \end{aligned}$$

Conclusion, f est dérivable sur

$$\boxed{\mathcal{D}_1 =]-1;1[.}$$

De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}_1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}\right)' \times \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}\right)^2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)'(1+x) - \sqrt{1-x^2}}{(1+x)^2} \times \frac{1}{1+\frac{1-x^2}{(1+x)^2}} \\ &= \left[\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}(1+x) - \sqrt{1-x^2}\right] \frac{1}{(1+x)^2+1-x^2} \\ &= \frac{-x(1+x) - \left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2+2x} \\ &= \frac{-x-x^2-1+x^2}{2(1+x)\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\frac{1+x}{2(1+x)\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

On reconnait la dérivée de la fonction arccos (ou arcsin pour ceux qui préfèrent). De plus $\mathcal{D}_1$ est un intervalle donc

$$\exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathcal{D}_1, \quad f(x) = \frac{1}{2}\arccos(x) + K.$$

En particulier pour $x = 0 \in \mathcal{D}_1$,

$$\begin{aligned} f(0) = \frac{1}{2}\arccos(0) + K \quad &\Leftrightarrow \quad \arctan\left(\frac{\sqrt{1-0^2}}{1+0}\right) = \frac{\pi}{4} + K \\ &\Leftrightarrow \quad K = \arctan(1) - \frac{\pi}{4} = 0. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_1, \quad f(x) = \frac{\arccos(x)}{2}.}$$

On peut observer que f est continue sur $[-1;1]$, cette égalité est donc encore vraie sur $[-1;1]$.

5. Démontrer que l'équation $\arctan(3x) + \arctan(10x) = \frac{3\pi}{4}$ admet au plus une solution dans $\mathbb{R}$ et préciser l'unique valeur du réel possiblement solution.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les implications suivantes :

$$\begin{aligned}
\arctan(3x)+\arctan(10x)=\frac{3\pi}{4} \quad &\Rightarrow \quad \tan\left(\arctan(3x)+\arctan(10x)\right)=\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-1\\
&\Rightarrow \quad \frac{\tan\left(\arctan(3x)\right)+\tan\left(\arctan(10x)\right)}{1-\tan\left(\arctan(3x)\right)\tan\left(\arctan(10x)\right)}=-1\\
&\Rightarrow \quad \frac{3x+10x}{1-3x\times 10x}=-1\\
&\Rightarrow \quad \frac{13x}{1-30x^2}=-1\\
&\Rightarrow \quad 13x=-1+30x^2\\
&\Rightarrow \quad 30x^2-13x-1=0.
\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé, $\Delta = 169+120 = 289 = 17^2$. Par conséquent les racines associées sont $r_1 = \frac{13-17}{60} = -\frac{4}{60} = -\frac{1}{15}$ et $r_2 = \frac{13+17}{60} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\arctan(3x)+\arctan(10x)=\frac{3\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{15} \text{ OU } x=\frac{1}{2}.$$

Or on observe que si $x=-\frac{1}{15}$ alors $5x<3x<0$ et donc $\arctan(3x)+\arctan(10x)<0<\frac{3\pi}{4}$. Par conséquent, $-\frac{1}{15}$ n'est pas solution. Conclusion,

L'équation admet au plus une solution et si celle-ci existe elle vaut nécessairement $x=\frac{1}{2}$.