Correction de l'interrogation 8
Equations complexes

1. (a) Enoncer la proposition reliant les coefficients d'un trinôme à ses racines.
Solution. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ et z_1 et z_2 les deux racines (éventuellement confondues) de az^2+bz+c. Alors,
$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

(b) Caractériser les racines n-ièmes de l'unité par une somme.
Solution. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n-1} z^k = 1 + z + \cdots + z^{n-1} = 0.$$

(c) Définir une fonction injective, surjective, bijective.
Solution. Soient $U \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $V \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{F}(U,V)$.
- On dit que f est injective sur U si et seulement si
$$\forall (x,y) \in U^2, \quad (f(x) = f(y)) \quad \Rightarrow \quad (x = y).$$
- On dit que f est surjective sur V si et seulement si
$$\forall y \in V,\ \exists x \in U, \quad y = f(x).$$
- On dit que f est bijective sur U dans V si et seulement si
$$\forall y \in V,\ \exists! x \in U, \quad y = f(x).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -8-6i$.
Solution. Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}
z^2 = -8-6i \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = -8-6i \\ x^2+y^2 = |z|^2 = |-8-6i| = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ x^2+y^2 = 10 \\ xy = -3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \\ xy = -3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \text{ OU } \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \text{car } xy \leqslant 0.
\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{z^2 = -8-6i \quad \Leftrightarrow \quad z = 1-3i \text{ OU } z = -1+3i.}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $(z+1)^5 = (z-i)^5$.
Solution. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :
$$(z+1)^5 = (z-i)^5 \ \Leftrightarrow\ \exists k \in [\![0;4]\!],\ z+1 = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}}(z-i) \ \Leftrightarrow\ \exists k \in [\![0;4]\!],\ 1+i\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}} = z\left(\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}} - 1\right).$$

On note que $\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}}-1=0 \Leftrightarrow k=0$. De plus si $k=0$, alors $1+i\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}}=1+i\neq 0=z\left(\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}}-1\right)$. Donc $k=0$ n'est pas possible dans notre équation. Ainsi,

$$\begin{aligned}
(z+1)^5=(z-i)^5 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k\in[\![1;4]\!], z\left(\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}}-1\right)=1+i\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}}=1+\mathrm{e}^{i\left(\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{2}\right)}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in[\![1;4]\!], z=\frac{1+\mathrm{e}^{i\left(\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{2}\right)}}{\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}}-1}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in[\![1;4]\!], z=\frac{\mathrm{e}^{i\left(\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{4}\right)}}{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{5}}}\frac{\mathrm{e}^{-i\left(\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{4}\right)}+\mathrm{e}^{i\left(\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{4}\right)}}{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{5}}-\mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{5}}}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{par factorisation par l'angle moitié}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in[\![1;4]\!], z=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{4}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in[\![1;4]\!], z=\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\,\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)}
\end{aligned}$$

Conclusion, les solutions sont

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\,\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)}\;\middle|\;k\in[\![1;4]\!]\right\}.}$$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(1+i)\,z+5i=0$.
Solution. Soient $z\in\mathbb{C}$ et Δ le discriminant de $z^2-(1+i)\,z+5i$:

$$\Delta=(1+i)^2-20i=1+2i-1-20i=-18i=18\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}\,.$$

Posons

$$\delta=3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}=3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\,(1-i)\,.$$

Alors, on a $\delta^2=\Delta$ et par suite,

$$z^2-(1+i)\,z+5i=0 \quad \Leftrightarrow \quad z=\frac{1+i+3\,(1-i)}{2}=2-i \;\text{ OU }\; z=\frac{1+i-3\,(1-i)}{2}=-1+2i.$$

Conclusion,

$$\boxed{z^2-(1+i)\,z+5i=0 \quad \Leftrightarrow \quad z=2-i \;\text{ OU }\; z=-1+2i.}$$

On vérifie : $2-i-1+2i=-1-i=-b$ *et* $(2-i)\,(-1+2i)=-2+2+4i+i=5i=c$. *OK*

5. Soit $z\in\mathbb{U}\setminus\{i\}$. Soient $A\,(z)$, $B\,(i)$ et $C\,(z\,(1+i)-1)$. Montrer que A, B et C sont alignés.
Solution. Posons z_A, z_B et z_C les affixes de A, B et C respectivement. On note que $z_B-z_A=i-z\neq 0$. Donc $\omega=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ est bien défini. De plus

$$\begin{aligned}
\omega&=\frac{z\,(1+i)-1-z}{i-z}\\
&=\frac{iz-1}{i-z}\\
&=\frac{(iz-1)\,(-i-\overline{z})}{|i-z|^2}\\
&=\frac{z-i\,|z|^2+i+\overline{z}}{|i-z|^2}\\
&=\frac{z+\overline{z}-i+i}{|i-z|^2} \qquad \text{car } z\in\mathbb{U}\\
&=\frac{2\mathrm{Re}\,(z)}{|i-z|^2}\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion, } \arg\left(\tfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=0 \text{ et } A,\ B \text{ et } C \text{ sont bien alignés.}}$$