Réponses de l'interrogation 9
Calcul d'intégrales

1. (a) Enoncer le théorème de séparation de l'intégrale.
Solution. Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a\neq b$ et $f\in\mathscr{F}([a;b],\mathbb{R})$. On suppose que
   - La fonction f est continue sur $[a;b]$,
   - la fonction f est positive sur $[a;b]$,
   - $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=0$.

   Alors pour tout $t\in[a;b]$, $f(t)=0$.

   (b) Enoncer le théorème de changement de variable.
Solution. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi:I\to J$ une fonction $\mathscr{C}^1$ sur I, $f:J\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur J. Alors, pour tout $(a,b)\in I^2$,
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

   (c) Enoncer les limites remarquables du sinus, cosinus et de tangente.
Solution. On a
$$\lim_{\substack{h\to0\\h\neq0}}\frac{\sin(h)}{h}=1,\qquad\lim_{\substack{h\to0\\h\neq0}}\frac{1-\cos(h)}{h^2}=\frac{1}{2},\qquad\lim_{\substack{h\to0\\h\neq0}}\frac{\tan(h)}{h}=1.$$

2. (a) Sans justification, ni d'étude de domaine de définition, donner les primitives de $f:x\mapsto\cos(x)\sin(x)$.
Solution. Ainsi l'ensemble des primitives de f est donné par
$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\x&\mapsto&\frac{\sin^2(x)}{2}+K\end{array}\;\middle|\;K\in\mathbb{R}\right\}.}$$

   (b) Sans justification, ni d'étude de domaine de dérivabilité, donner la dérivée de $g:x\mapsto\arctan(x^x)$ *(on ne cherchera pas à simplifier le résultat).*
Solution. Conclusion,
$$\boxed{g'(x)=\frac{(\ln(x)+1)\,x^x}{1+x^{2x}}.}$$

3. Justifier que $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{t}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$ existe puis calculer I par une intégration par parties.
Solution. Conclusion,
$$\boxed{I=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(2).}$$

4. Justifier que $f:u\mapsto\frac{1}{(1-u^2)^{3/2}}$ admet des primitives sur $]0;1[$ et les calculer par le changement de variable $u=\sin(v)$.
Solution. Conclusion, $\boxed{f\text{ admet des primitives sur }]0;1[}$ données par
$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\begin{array}{ccc}]0;1[&\to&\mathbb{R}\\x&\mapsto&\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C\end{array}\;\middle|\;C\in\mathbb{R}\right\}.}$$

5. Soit $A(x)\underset{x\to0}{=}o\left(\arctan(x)+x^3+o\left(\mathrm{e}^{x^2+x^4}\right)+\ln\left(\frac{x^2+4x+3}{x^2+3x+4}\right)+xo(x)\right)$. Simplifier $A(x)$.
Solution. Conclusion,
$$\boxed{A(x)\underset{x\to0}{=}o(1).}$$