Interrogation 10 d'entrainement
Equations différentielles d'ordre 1

1. **Restituer le cours.**
   - 1.1 Enoncer le théorème donnant l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions d'une équation homogène d'ordre 1.
   - 1.2 Enoncer la proposition qui affirme que l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel.
   - 1.3 Enoncer le théorème donnant l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions d'une équation différentielle d'ordre 1 à partir d'une solution « particulière ».
   - 1.4 Enoncer le principe de superposition.
   - 1.5 Définir un problème de Cauchy. Propriété ?

   Révisions

   - 1.6 Exprimer la partie réelle, la partie imaginaire et le module en fonction du conjugué.
   - 1.7 Enoncer la formule donnant le carré du module d'une somme.
   - 1.8 Enoncer les inégalités triangulaires.
   - 1.9 Enoncer les formules d'Euler.
   - 1.10 Enoncer la formule de Moivre.

2. **Déterminer les solutions d'une équation différentielle homogène d'ordre 1.** Déterminer les intervalles de résolution puis $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E) d'inconnue y une fonction dérivable.
   - 2.1 $(E) : y'(t) - 5t^2 y(t) = 3t\,(y(t)+2)$.
   - 2.2 $(E) : \mathrm{ch}^4(s)y'(s) + \mathrm{sh}(s)y(s) = 1$.
   - 2.3 $(E) : \left(u^2+7\right)y'(u) = 5 - 3uy(u)$.
   - 2.4 $(E) : \sqrt{1-x^2}\,y'(x) = y(x) + 8$.
   - 2.5 $(E) : y(r)\sin(r) + \cos(r)y'(r) = 0$.
   - 2.6 $(E) : \left(a^3+3a^2+7a+8\right)y'(a) + \left(3a^2+6a+7\right)y(a) = 8a^3 - 5a^2 + 2a + 4$ sur $I = \mathbb{R}_+$.
   - 2.7 $(E) : t\sqrt{\ln(t)}\,y'(t) + \ln(t) + y(t) = 0$.
   - 2.8 $(E) : \cos^2(s)y'(s) + \sin(s)y(s) = -y'(s)$.
   - 2.9 $(E) : \sqrt{1-u^2}\,y'(u) + \arcsin(u)y(u) = \arccos(u)$.
   - 2.10 $(E) : y'(x) + \mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x}\,y(x) = \mathrm{e}^{2x}$.

   Pour les gourmands, en voici d'autres :

   - 2.11 $(E) : y'(r) + 8r\sqrt{4r^2-1}\,y(r) = 0$.
   - 2.12 $(E) : \frac{y'(a)+9y(a)}{9} = -a^2 y'(a)$.
   - 2.13 $(E) : \theta \ln(\theta)\,y'(\theta) = y(\theta) + \sin(\theta)$.
   - 2.14 $(E) : t^6 y'(t) + t^2 y(t) = 5t - y'(t)$.
   - 2.15 $(E) : s\left(1+\ln^2(s)\right)y'(s) + y(s) = \ln(s)$.
   - 2.16 $(E) : \sqrt{u}\,y'(u) + \mathrm{e}^{\sqrt{3u}}\,y(u) = 5u^2 - 6$.

3. **Savoir appliquer la méthode de variation de la constante.**
   3.1 Justifier que l'équation $(E) : y'(x) + \frac{2x}{1-x^2}y(x) = \sqrt{1-x^2}$ admet des solutions sur $I =]-1\,;\,1[$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.
   On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto 1-x^2$ est une solution de l'équation homogène associée.
   3.2 Justifier que l'équation $(E) : y'(x) + \frac{1}{1+x}y(x) = 1 + \ln(x)$ admet des solutions sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.
   On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est une solution de l'équation homogène associée.
   Intégrer $x \mapsto x\ln(x)$ par une intégration par parties.
   3.3 Justifier que l'équation $(E) : y'(x) - 2y(x) = \cos(x)$ admet des solutions sur $I = \mathbb{R}$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.
   On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ est une solution de l'équation homogène associée.
   3.4 Justifier que l'équation $(E) : y'(x) + \frac{1}{x(x+1)}y(x) = (x+1)\arctan(x)$ admet des solutions sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.
   On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto \frac{x+1}{x}$ est une solution de l'équation homogène associée.
   3.5 Justifier que l'équation $(E) : y'(x) + \frac{1}{1+x}y(x) = \sin(x)$ admet des solutions sur $I =]-1\,;\,+\infty[$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.
   On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est une solution de l'équation homogène associée.
4. **Savoir intégrer l'inverse d'un trinôme.**
   4.1 Justifier que $f : x \mapsto \frac{1}{3x^2-21x+30}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}_-^*$ et les déterminer.
   4.2 Justifier que $f : x \mapsto \frac{x^3}{x+2}$ admet des primitives sur $]-2\,;\,+\infty[$ et les déterminer.
   4.3 Justifier que $f : x \mapsto \frac{x+2}{x^2+x+4}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et les déterminer.
   4.4 Justifier que $f : x \mapsto \frac{1}{x^3+3x^2+2x}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ et les déterminer.
   4.5 Justifier que $f : x \mapsto \frac{6x^2-11x+24}{2x^2-4x+8}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et les déterminer.
5. **Savoir faire un changement de variable.**
   5.1 Justifier que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos^5(t)\,\mathrm{d}t$ existe et calculer I à l'aide du changement de variable $u = \cos(t)$.
   5.2 Justifier que $f : x \mapsto x^2\sqrt{1-x^2}$ admet des primitives sur $[-1\,;\,1]$ et les déterminer à l'aide du changement de variable $x = \cos(u)$.
   5.3 Justifier que $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \arctan(t)\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ existe et calculer I à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$.
   5.4 Justifier que $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et les déterminer à l'aide du changement de variable $u = \mathrm{e}^t$.
   5.5 Justifier que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ existe et calculer I à l'aide du changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.